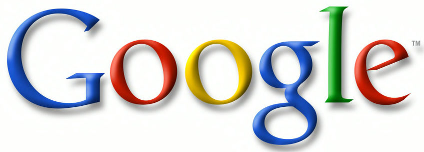
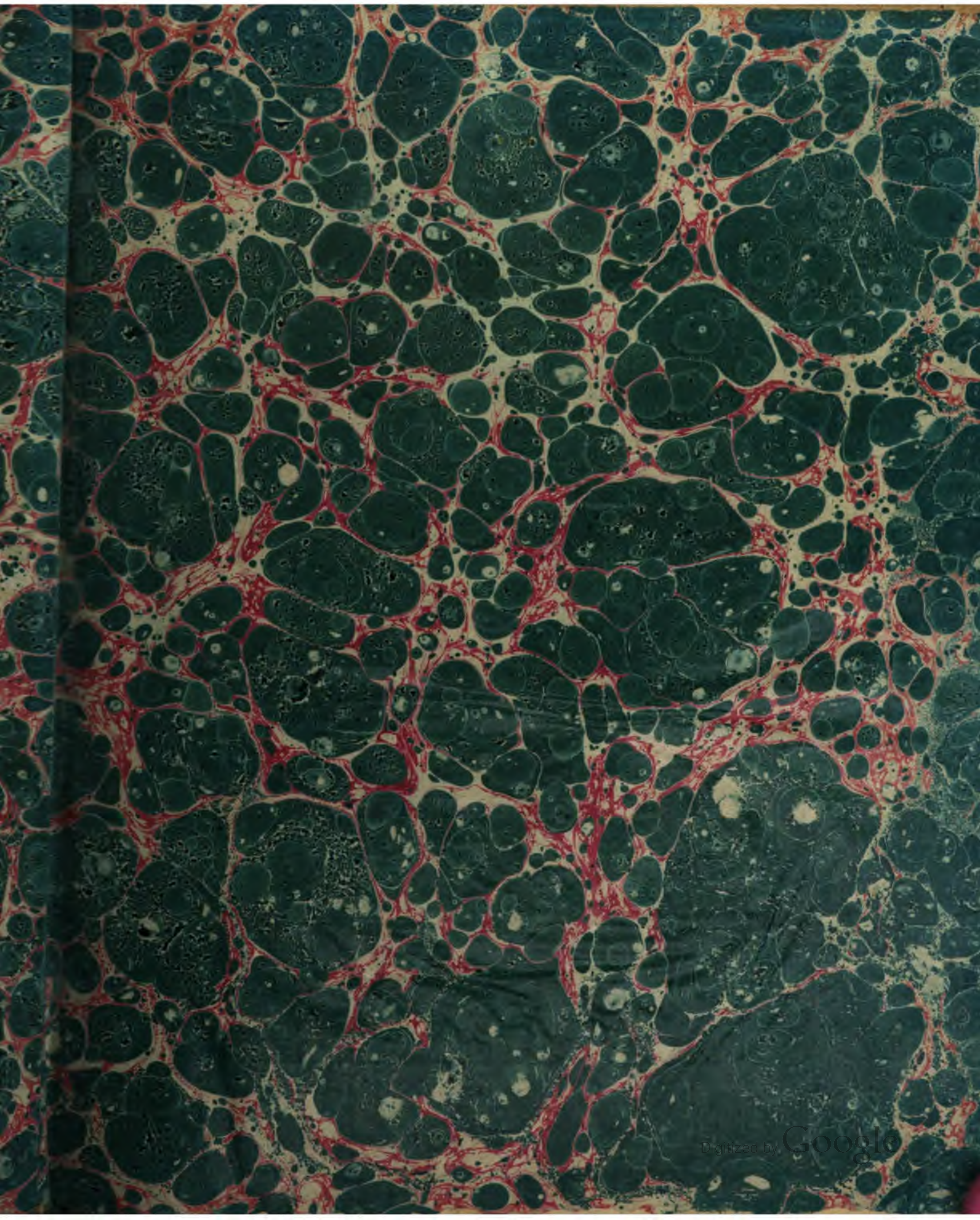



900000066626



ANNALES

DE MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

CONDITIONS DE LA SOUSCRIPTION.

Depuis le mois de juillet 1810, ce recueil paraît le premier de chaque mois, par livraison de 32 pages. La couverture de chaque livraison contient l'annonce des ouvrages nouveaux et des concours académiques.

Les articles à insérer, les demandes d'abonnement, ainsi que le montant des souscriptions peuvent être indifféremment adressés, *franc de port*, ou au bureau des *Annales*, rue d'Avignon, n.° 130, à Nismes, (Gard); ou à la dame *veuve Courcier*, imprimeur-libraire, quai des Augustins, n.° 57, à Paris.

Le prix de la souscription annuelle est 21 francs pour la France et 24 francs pour l'Étranger. Il en coûte moitié pour six mois, et le prix de chacun des trois premiers volumes est inférieur de 3 francs à celui de la souscription annuelle. Le tout franc de port.

AVIS au Relieur,

Sur le placement des Planches.

Planche	I.	Après la page	168.
	II.		196.
	III.		384.

ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

RECUEIL PÉRIODIQUE,

RÉDIGÉ

Par J. D. GERGONNE, ancien officier au 4.me régiment d'artillerie à pied, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Nismes, secrétaire et professeur-suppléant de philosophie à la faculté des lettres, membre de l'académie du Gard et associé de celle de Nancy.

TOME TROISIÈME.

A NISMES,

DE L'IMPRIMERIE DE P. BLACHIER-BELLE.

Et se trouve à PARIS, chez la dame Veuve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n.° 57.

1812 ET 1813.



ANNALES
DE MATHEMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les facultés numériques ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



1. Dans mon *Analise des réfractions astronomiques* (chap. III. n.os 142 et 203) j'ai enseigné à trouver la valeur numérique de toute faculté quelconque, par des séries convergentes à volonté ; mais les méthodes que j'ai indiquées, pour parvenir à ce but, peuvent être considérablement simplifiées. Je donne le nom de *Facultés* aux produits dont les facteurs constituent une progression arithmétique, tels que

$$a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]\ ;$$

et, pour désigner un pareil produit, j'ai proposé la notation

$$a^{m|r}.$$

Les facultés forment une classe de fonctions très-élémentaires, tant que leur exposant est un nombre entier, soit positif soit négatif ; mais, dans tous les autres cas, ces mêmes fonctions deviennent absolument transcendantes. (*)

(*) La théorie des *Facultés numériques*, que M. Kramp désigne aussi sous la dénomination de *Factorielles*, et qui reviennent encore à ce que Vandermonde a appelé *Puissances du second ordre*, n'ayant encore été développée jusqu'ici que dans un très-petit nombre d'ouvrages, nous croyons convenable de donner

2. J'observe que toute faculté numérique quelconque est constamment réductible à la forme très-simple

---

ici une idée succincte de ces sortes de fonctions, et des notations par lesquelles on les désigne.

Dans l'expression

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]\ ,$$

a est ce qu'on appelle la *base* de la faculté, r en est la *différence*, et m en est l'*exposant*; il est clair qu'on a, en renversant l'ordre des facteurs,

$$a^{m|r}=[a+(m-1)r]^{m|-r}.$$

Dans le cas où $r=0$, la faculté se réduit évidemment à une simple puissance; ainsi on a

$$a^{m|0}=a^m.$$

Au moyen d'un multiplicateur choisi d'une manière convenable, on peut changer, à volonté, soit la base soit la différence d'une faculté. Le principe de cette transformation réside dans les équations suivantes, qui se vérifient d'elles-mêmes par le simple développement,

$$a^{n|r}=\left(\frac{a}{a'}\right)^n.a'^{\,n|\frac{a'r}{a}}=\left(\frac{r}{r'}\right)^n.\left(\frac{ar'}{r}\right)^{n|r'}.$$

Si l'on écrit l'équation identique

$$a'(a'+r)\ldots.[a'+(m-1)r][a'+mr]\ldots.[a'+(m+n-1)r]$$

$$=\{a'(a'+r)\ldots.[a'+(m-1)r]\}\times\{(a'+mr)\ldots.[a'+mr+(n-1)r]\}\ ;$$

suivant la notation des facultés, il viendra

$$a'^{m+n|r}=a'^{m|r}\times(a'+mr)^{n|r}\ ;$$

ou en posant $m+n=p$, d'où $n=p-m$, et $a'+mr=a$, d'où $a'=a-mr$, et renversant, cette équation deviendra

$$(a-mr)^{m|r}.a^{p-m|r}=(a-mr)^{p|r}\ ;$$

faisant alors $p=m$, et réduisant, il viendra

$$a^{0|r}=1\ ;$$

ainsi *toute faculté dont l'exposant est zéro vaut l'unité.*

Si, dans la même équation, on fait $p=0$, en observant que, d'après ce qui précède, $(a-mr)^{0|r}=1$, il viendra

$$a^{-m|r}=\frac{1}{(a-mr)^{m|r}}=\frac{1}{(a-r)^{m|-r}}\ ;$$

ce qui fournit l'interprétation des facultés dont l'exposant est négatif. On trouvera aussi que

$$a^{-m|-r}=\frac{1}{(a+mr)^{m|-r}}=\frac{1}{(a+r)^{m|r}}.$$

$$1^{m|1}=1.2.3\ldots\ldots m$$

ou à cette autre forme plus simple

$$m!\,,$$

si l'on veut adopter la notation dont j'ai fait usage dans mes *Élémens d'arithmétique universelle*, n.° 289.

On a, en effet

$$a^{m|r}=a(a+r)(a+2r)\ldots\ldots[a+(m-1)r]$$
$$=r^m.\frac{a}{r}\left(\frac{a}{r}+1\right)\left(\frac{a}{r}+2\right)\ldots\ldots\left[\frac{a}{r}+(m-1)\right]$$
$$=r^m.\frac{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)\frac{a}{r}\ldots\ldots\left[\frac{a}{r}+(m-1)\right]}{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)}$$
$$=\frac{\left(\frac{a}{r}+m-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}r^m.$$

et

$$a^{m|-r}=a(a-r)(a-2r)(a-3r)\ldots\ldots[a-(m-1)r]$$
$$=r^m.\frac{a}{r}\left(\frac{a}{r}-1\right)\left(\frac{a}{r}-2\right)\ldots\ldots\left[\frac{a}{r}-(m-1)\right]$$

Nous terminerons par un rapprochement entre les notations de Vandermonde et celle de M. Kramp. Vandermonde fait

$$a.(a-1)(a-2)\ldots\ldots(a-m+1)=[\overset{m}{a}]\,,$$

d'où *il* suit qu'~~en rapprochant les deux notations, on a~~

$$[\overset{m}{a}]=(a-m+1)^{m|1}=a^{m|-1}.$$

Si, après avoir changé a en a', on pose $a'-m+1=a$, d'où $a'=a+m-1$, on obtiendra cet autre rapprochement

$$[\overset{m}{a+m-1}]=a^{m|1}=(a+m-1)^{m|-1}.$$

Toutes les facultés pouvant être exprimées en fonction d'autres facultés dans lesquelles la base et la différence sont également l'unité, et ces dernières devant, en conséquence, se représenter fréquemment dans les calculs ; M. Kramp, dans son *Arithmétique universelle*, a proposé de les écrire simplement comme il suit :

$$1.2.3.4\ldots\ldots m=1^{m|1}=m!.$$

J. D. G.

$$= r^m . \frac{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-m\right)\left[\frac{a}{r}-(m+1)\right]\ldots\left(\frac{a}{r}-1\right)\frac{a}{r}}{1.2.3\ldots\ldots\left(\frac{a}{r}-m\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-m\right)!} r^m .$$

ce qui donne les deux expressions littérales qui suivent

$$a^{m|r} = \frac{\left(\frac{a}{r}+m-1\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!} r^m , \quad a^{m|-r} = \frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-m\right)!} r^m ;$$

lesquelles ont lieu quels que soient a et r. (*)

3. Les facultés numériques étant ainsi réduites, dans tous les cas, à la forme bien plus simple $y!$, qui n'est fonction que d'une seule variable ; il suffira de connaître les valeurs numériques de ces derniers produits, pour les y compris entre les simples limites *zéro* et *plus un*, pour pouvoir en déduire immédiatement toutes les autres. En effet, désignant par m une fraction comprise entre o et $+1$, et par n un nombre entier quelconque, on voit que tous les nombres possibles, positifs ou négatifs, rentrent dans la forme $m+n$. Or, nous avons

$$(m+n)! = 1^{m+n|1} = 1^{m|1}(m+1)^{n|1} = m!(m+1)^{n|1} ,$$

(*) Ces deux formules, qui reviennent entièrement au même, dans le cas d'un exposant *entier*, doivent être soigneusement distinguées, dans le cas d'un exposant *non entier*. Si l'on imagine une courbe ayant r pour abscisse et les facultés $a^{m|r}$ pour ordonnées, cette courbe cessera d'être continue à $r=0$; et celle qui aurait pour ordonnées les facultés $a^{m|-r}$ ne sera pas la continuation de la première : bien qu'en cet endroit elles aient une tangente commune, et le même rayon osculateur. Les absurdités apparentes auxquelles j'ai été conduit, dans mon *Analise des réfractions*, viennent de ce que, par un excès de confiance dans la loi de continuité, j'ai passé trop légèrement de r *positif* à r *négatif*, en étendant à celui-ci ce qui n'avait été démontré que pour l'autre.

$$(m-n)!=1^{m-n|1}=\frac{1^{m|1}}{m^{n|-1}}=\frac{m!}{m^{n|-1}}\ ;\quad (*)$$

d'où l'on voit que la détermination des facultés $(m\pm n)!$ ne dépend que de celle de $m!$ et des facultés $(m+1)^{n|1}$ et $m^{n|-1}$, à exposans entiers. L'application aux cas particuliers donne, en supposant toujours m moindre que l'unité,

$$(1+m)!=(1+m)m!\ ,\qquad (-1+m)!=+\frac{m!}{m}\ ,$$

$$(2+m)!=(1+m)(2+m)m!\ ,\qquad (-2+m)!=-\frac{m!}{m(1-m)}\ ,$$

$$(3+m)!=(1+m)(2+m)(3+m)m!\ ,\quad (-3+m)!=+\frac{m!}{m(1-m)(2-m)}\ ,$$

.... ; ....

4. Frappé de ces idées, M. Bessel, professeur d'astronomie à *Kônigsberg*, a construit une table des logarithmes briggiens des fractions

$$\frac{1^{x-1|1}}{\sqrt{2\pi}}\ ,$$

depuis $x=1$ jusqu'à $x=2$, à dix décimales ; avec leurs premières, deuxièmes et troisièmes différences, qu'il a bien voulu me communiquer, par une lettre du 7 mars de la présente année 1812. Ajoutant aux logarithmes de la table de M. Bessel celui de $\sqrt{2\pi}$, qui est

$$0{,}39908\ 99342\ ,$$

on aura les logarithmes des produits $y!$, entre $y=0$ et $y=1$. Ces produits sont ~~égaux à l'unité, pour $y=0$ et $y=1$~~. Ils parviennent à leur *minimum* vers $y=0{,}46$; on a alors à peu près $y!=0{,}885604$. Pour calculer ces logarithmes, l'auteur a employé une méthode particulière, différente de la mienne, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Il est presque superflu d'avertir que tous les logarithmes de la table ont une dixaine de trop à leur caractéristique. (*)

(*) Voyez la précédente note.

(**) Il parait, par la marche des quatrièmes différences, qu'on ne peut guère compter sur le 10.e chiffre décimal des logarithmes de cette table.

J. D. G.

TABLE des Logarithmes des valeurs que prend la fac

y.	Valeurs de Log. y !	Différences I.	Différences II.	Differ. III.
0,00	0,00000 00000	— 247 12693	+ 7 04106	— 10030
0,01	9,99752 87307	— 240 08587	+ 6 94076	— 9770
0,02	9,99512 78720	— 233 14511	+ 6 84306	— 9517
0,03	9,99279 64209	— 226 30205	+ 6 74789	— 9275
0,04	9,99053 34004	— 219 55416	+ 6 65514	— 9042
0,05	9,98833 78588	— 212 89902	+ 6 56472	— 8813
0,06	9,98620 88686	— 206 33430	+ 6 47659	— 8597
0,07	9,98414 55256	— 199 85771	+ 6 39062	— 8389
0,08	9,98214 69485	— 193 46709	+ 6 30673	— 8183
0,09	9,98021 22776	— 187 16036	+ 6 22490	— 7987
0,10	9,97834 06740	— 180 93546	+ 6 14503	— 7799
0,11	9,97653 13194	— 174 79043	+ 6 06704	— 7616
0,12	9,97478 34151	— 168 72339	+ 5 99088	— 7438
0,13	9,97309 61812	— 162 73251	+ 5 91650	— 7267
0,14	9,97146 88561	— 156 81601	+ 5 84383	— 7102
0,15	9,96990 06960	— 150 97218	+ 5 77281	— 6940
0,16	9,96839 09742	— 145 19937	+ 5 70341	— 6789
0,17	9,96693 89805	— 139 49596	+ 5 63552	— 6635
0,18	9,96554 40209	— 133 86044	+ 5 56917	— 6489
0,19	9,96420 54165	— 128 29127	+ 5 50428	— 6352
0,20	9,96292 25038	— 122 78699	+ 5 44076	— 6212
0,21	9,96169 46339	— 117 34623	+ 5 37864	— 6080
0,22	9,96052 11716	— 111 96759	+ 5 31784	— 5954
0,23	9,95940 14957	— 106 64975	+ 5 25830	— 5825
0,24	9,95833 49982	— 101 39145	+ 5 20005	— 5709
0,25	9,95732 10837	— 96 19140	+ 5 14296	— 5589
0,26	9,95635 91697	— 91 04744	+ 5 08707	— 5476
0,27	9,95544 86953	— 85 96237	+ 5 03231	— 5363
0,28	9,95458 90716	— 80 92906	+ 4 97868	— 5260
0,29	9,95377 97810	— 75 95038	+ 4 92608	— 5153
0,30	9,95302 02772	— 71 02430	+ 4 87455	— 5052
0,31	9,95231 00342	— 66 14975	+ 4 82403	— 4953
0,32	9,95164 85367	— 61 32572	+ 4 77450	— 4859
0,33	9,95103 52793	— 56 55122	+ 4 72591	— 4764
0,34	9,95046 97673	— 51 82531	+ 4 67827	— 4674
0,35	9,94995 15142	— 47 14704	+ 4 63153	— 4587
0,36	9,94948 00438	— 42 51551	+ 4 58566	— 4499
0,37	9,94905 48887	— 37 92985	+ 4 54067	— 4419
0,38	9,94867 55902	— 33 38918	+ 4 49648	— 4334
0,39	9,94834 16984	— 28 89270	+ 4 45314	— 4258
0,40	9,94805 27714	— 24 43956	+ 4 41056	— 4179
0,41	9,94780 83758	— 20 02900	+ 4 36877	— 4104
0,42	9,94760 80858	— 15 66023	+ 4 32773	— 4033
0,43	9,94745 14835	— 11 33250	+ 4 28740	— 3961
0,44	9,94733 81588	— 7 04510	+ 4 24779	— 3889
0,45	9,94726 77075	— 2 79731	+ 4 20890	— 3824
0,46	9,94723 97344	+ 1 41159	+ 4 17066	— 3759
0,47	9,94725 38503	+ 5 58225	+ 4 13307	— 3692
0,48	9,94730 96728	+ 9 71532	+ 4 09615	— 3630
0,49	9,94740 68260	+ 13 81147	+ 4 05985	— 3570
0,50	9,94754 49407	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509

pour toutes les valeurs de y, depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$.

y.	Valeurs de Log. y !	Différences I.	Différences II.	Différ. III.
0,50	9,94754 49407	+ 17 87132	+ 4 02415	— 3509
0,51	9,94772 36539	+ 21 89547	+ 3 98906	— 3451
0,52	9,94794 26086	+ 25 88453	+ 3 95455	— 3396
0,53	9,94820 14539	+ 29 83908	+ 3 92059	— 3336
0,54	9,94849 98447	+ 33 75967	+ 3 88723	— 3286
0,55	9,94883 74414	+ 37 64690	+ 3 85437	— 3232
0,56	9,94921 39104	+ 41 50127	+ 3 82205	— 3179
0,57	9,94962 89231	+ 45 32332	+ 3 79026	— 3130
0,58	9,95008 21563	+ 49 11358	+ 3 75896	— 3080
0,59	9,95057 32921	+ 52 87254	+ 3 72816	— 3031
0,60	9,95110 20175	+ 56 60070	+ 3 69785	— 2986
0,61	9,95166 80245	+ 60 29855	+ 3 66799	— 2937
0,62	9,95227 10100	+ 63 96654	+ 3 63862	— 2894
0,63	9,95291 06754	+ 67 60516	+ 3 60968	— 2849
0,64	9,95358 67270	+ 71 21484	+ 3 58119	— 2806
0,65	9,95429 88754	+ 74 79603	+ 3 55313	— 2766
0,66	9,95504 68357	+ 78 34916	+ 3 52547	— 2721
0,67	9,95583 03273	+ 81 87463	+ 3 49826	— 2683
0,68	9,95664 90736	+ 85 37289	+ 3 47143	— 2643
0,69	9,95750 28025	+ 88 84432	+ 3 44500	— 2605
0,70	9,95839 12457	+ 92 28932	+ 3 41895	— 2566
0,71	9,95931 41389	+ 95 70827	+ 3 39329	— 2529
0,72	9,96027 12216	+ 99 10156	+ 3 36800	— 2495
0,73	9,96126 22372	+ 102 46956	+ 3 34305	— 2457
0,74	9,96228 69328	+ 105 81261	+ 3 31848	— 2421
0,75	9,96334 50589	+ 109 13109	+ 3 29427	— 2393
0,76	9,96443 63698	+ 112 42536	+ 3 27034	— 2354
0,77	9,96556 06234	+ 115 69570	+ 3 24680	— 2321
0,78	9,96671 75804	+ 118 94250	+ 3 22359	— 2294
0,79	9,96790 70054	+ 122 16609	+ 3 20065	— 2257
0,80	9,96912 86663	+ 125 36674	+ 3 17808	— 2231
0,81	9,97038 23337	+ 128 54482	+ 3 15577	— 2197
0,82	9,97166 77819	+ 131 70059	+ 3 13380	— 2170
0,83	9,97298 47878	+ 134 83439	+ 3 11210	— 2140
0,84	9,97433 31317	+ 137 94649	+ 3 09070	— 2112
0,85	9,97571 25966	+ 141 03719	+ 3 06958	— 2083
0,86	9,97712 29685	+ 144 10677	+ 3 04875	— 2058
0,87	9,97856 40362	+ 147 15552	+ 3 02817	— 2028
0,88	9,98003 55914	+ 150 18369	+ 3 00789	— 2005
0,89	9,98153 74283	+ 153 19158	+ 2 98784	— 1977
0,90	9,98306 93441	+ 156 17942	+ 2 96807	— 1952
0,91	9,98463 11383	+ 159 14749	+ 2 94855	— 1928
0,92	9,98622 26132	+ 162 09604	+ 2 92927	— 1903
0,93	9,98784 35736	+ 165 02531	+ 2 91024	— 1879
0,94	9,98949 38267	+ 167 93555	+ 2 89145	— 1856
0,95	9,99117 31822	+ 170 82700	+ 2 87289	— 1832
0,96	9,99288 14522	+ 173 69989	+ 2 85457	— 1811
0,97	9,99461 84511	+ 176 55446	+ 2 83646	— 1787
0,98	9,99638 39957	+ 179 39092	+ 2 81859	— 1765
0,99	9,99817 79049	+ 182 20951	+ 2 80094	— 1746
1,00	0,00000 00000	+ 185 01045	+ 2 78348	— 1723

5. Dans l'ouvrage déjà cité (chapitre III, 39) j'ai prouvé que, h étant une fraction positive plus petite que $\frac{1}{2}$, on a

$$\text{Tang.}h\pi = \frac{(+h)^{\frac{1}{2}|+1}}{(-h)^{\frac{1}{2}|-1}}\ ;$$

mais, suivant les réductions enseignées ci-dessus, on a

$$(+h)^{\frac{1}{2}|+1} = \frac{(h-\frac{1}{2})!}{(h-1)!} = \frac{2h}{1+2h}\cdot\frac{(\frac{1}{2}+h)!}{h!}\ ;$$

$$(-h)^{\frac{1}{2}|-1} = \frac{(-h)!}{(-h-\frac{1}{2})!} = \frac{1-2h}{2-2h}\cdot\frac{(1-h)!}{(\frac{1}{2}-h)!}\ ;$$

d'où résulte

$$\text{Tang.}h\pi = \frac{h(1-h)}{(\frac{1}{2}+h)(\frac{1}{2}-h)}\cdot\frac{(\frac{1}{2}+h)!\,(\frac{1}{2}-h)!}{h!\,(1-h)!}\ .$$

Ainsi, si l'on demandait la tangente de 66°.36′, on aurait $h=0,37$, $1-h=0,63$, $\frac{1}{2}+h=0,87$, $\frac{1}{2}-h=0,13$; d'où

$$\text{Tang.}66°.36' = \frac{0,37\times0,63}{0,87\times0,13}\cdot\frac{0,87!\,0,13!}{0,37!\,0,63!}\ .$$

Voici le calcul :

Log. 37	=1,56820 17241 ,
Log. 63	=1,79934 05495 ,
Comp. arith. Log. 87	=8,06048 07474 ,
Comp. arith. Log. 13	=8,88605 66477 ,
Log. 0,87!	=9,97856 40362 ,
Log. 0,13!	=9,97309 61812 ,
Comp. arith. Log. 0,37!	=0,05094 51113 ,
Comp. arith. Log. 0,62!	=0,04708 93246 ,
Log. tang. 66°.36′	=0,36377 43220 :

6.

6. Il a été prouvé, dans le même ouvrage que

$$\frac{\text{Sin}.m\varpi}{\text{Sin}.n\varpi}=\frac{(+m)^{n-m|+1}}{(-m)^{n-m|-1}}=\frac{(-n)^{m-n|-1}}{(+n)^{m-n|+1}}\ ,$$

faisant $n=\frac{1}{2}$, et faisant ensuite successivement $m=h$ et $m=\frac{1}{2}-h$, il viendra

$$\text{Sin}.h\varpi=\frac{(+h)^{\frac{1}{2}-h|+1}}{(-h)^{\frac{1}{2}-h|-1}}=\frac{4h(1-h)(0{,}5)!\,(0{,}5)!}{h!\,(1-h)!}\ ;$$

$$\text{Cos}.h\varpi=\frac{(\frac{1}{2}-h)^{h|+1}}{(-\frac{1}{2}+h)^{h|-1}}=\frac{4(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)(0{,}5)!\,(0{,}5)!}{(\frac{1}{2}-h)!\,(\frac{1}{2}+h)!}\ ;$$

et, comme il est prouvé que

$$(\tfrac{1}{2})!=(0{,}5)!=\tfrac{1}{2}\sqrt{\varpi}\ ,$$

ces formules pourront être écrites comme il suit :

$$\text{Sin}.h\varpi=\frac{h(1-h)}{h!(1-h)!}\varpi\ ,\quad \text{Cos}.h\varpi=\frac{(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)}{(\frac{1}{2}-h)!(\frac{1}{2}+h)!}\varpi.$$

Ainsi, moyennant la table que nous venons de donner, on trouvera facilement, et jusqu'à dix décimales, le sinus, le cosinus et la tangente de tout angle proposé.

7. L'intégrale

$$\int t^{m-1}e^{-t^n}\mathrm{d}t\ ;$$

prise depuis $t=0$ jusqu'à $t=\infty$ étant égale à

$$\frac{1^{\frac{m}{n}|1}}{m}=\frac{\left(\frac{m}{n}\right)!}{m}\ ;$$

le logarithme de cette intégrale, pour toutes les valeurs de m et de n, se trouvera facilement par le moyen de la table.

8. L'intégrale

$$\int y^{m-1}(1-y^r)^n\mathrm{d}y\ ,$$

prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, étant égale à

$$\frac{r^{n|r}}{m^{n+1|r}}=\frac{n!}{m^{n+1|r}}r^n\ ;$$

en employant les réductions qui ont été enseignées, on trouvera pour l'expression de cette intégrale

$$\frac{n!\left(\dfrac{m}{r}-1\right)!}{r.\left(\dfrac{m}{r}+n\right)!}\ ;$$

formule facile à calculer au moyen de notre table.

9. Venons présentement au calcul de cette table ; soient B_2, B_4, B_6, B_8, ... les *nombres de Bernoulli*, à partir du second, en sorte qu'on ait $B_2=+\frac{1}{12}$, $B_4=-\frac{1}{120}$, ... (*). Dans l'ouvrage cité, j'ai employé la notation Γy, pour désigner la série

(*) On sait que ces nombres se déduisent les uns des autres au moyen de la formule

$$\frac{1}{n+1}+(-1)^n B_{n+1}=B_1-\frac{n}{1}B_2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}B_3-\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}B_4$$
$$+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}B_5-\ldots;$$

en y faisant successivement n égal à 1, 2, 3, 4, ...; voici les dix qui suivent le premier, avec leurs valeurs approchées, en décimales

$B_2=+\frac{1}{12}=+$ 0,08333 33333 33 ,
$B_4=-\frac{1}{120}=-$ 0,00833 33333 33 ,
$B_6=+\frac{1}{252}=+$ 0,00396 82539 68 ,
$B_8=-\frac{1}{240}=-$ 0,04666 66666 67 ,
$B_{10}=+\frac{[illegible]}{132}=+$ 0,00757 57575 76 ,
$B_{12}=-\frac{691}{32760}=-$ 0,02109 27960 93 ,
$B_{14}=+\frac{1}{12}=+$ 0,08333 33333 33 ,
$B_{16}=-\frac{3617}{8160}=-$ 0,44325 98039 22 ,
$B_{18}=+\frac{43867}{14364}=+$ 3,05395 43302 70 ,
$B_{20}=-\frac{174611}{6600}=-$ 26,45621 21212 12 .

J. D. G.

$$B_2 y + \tfrac{1}{3} B_4 y^3 + \tfrac{1}{5} B_6 y^5 + \tfrac{1}{7} B_8 y^7 + \ldots\ldots$$

Cette série, lorsque y est une petite fraction, est tellement convergente que les trois et même les deux premiers termes suffisent pour en trouver la valeur numérique jusqu'à neuf décimales. Souvent même on pourra faire simplement $\Gamma y = B_2 y = \frac{1}{12} y$. On trouve le Γ d'un nombre quelconque r par la formule qui suit :

$$\Gamma r = \Gamma \frac{r}{1+mr} - m - \mathrm{Log}.1^{m|r} + \left(m - \frac{1}{2} + \frac{1}{r}\right) \mathrm{Log}.(1+mr),$$

dans laquelle m désigne un nombre quelconque, pris à volonté ; on peut le prendre égal à 4, 5 ou 6, tout au plus. J'ai prouvé de plus que

$$\Gamma 1 = 1 - \tfrac{1}{2} \mathrm{Log}.2\pi \quad , \quad \Gamma 2 = \tfrac{1}{2} (1 - \mathrm{Log}.2) ;$$

et qu'on a ensuite

$$\Gamma \frac{1}{m+1} = \Gamma 1 + m + \mathrm{Log}.1^{m|1} - (m + \tfrac{1}{2}) \mathrm{Log}.(m+1),$$

$$\Gamma \frac{2}{2m+1} = \Gamma 2 + m + \mathrm{Log}.1^{m|2} - m \mathrm{Log}.(2m+1).$$

Ainsi les Γ de toutes les fractions de l'une ou de l'autre des deux formes générales $\frac{1}{m+1}$, $\frac{2}{2m+1}$, m désignant un nombre entier quelconque, se réduisent, dans tous les cas, à une simple addition de logarithmes hyperboliques.

10. Si l'on applique au cas de $a=1$, $r=1$, les formules de l'ouvrage cité, on aura

$$\mathrm{Log.\ nat.}\ (+y)! = -y + (y + \tfrac{1}{2}) \mathrm{Log}.(1+y) - \Gamma 1 + \Gamma . \frac{1}{1+y},$$

$$\mathrm{Log.\ nat.}\ (-y)! = +y - (y - \tfrac{1}{2}) \mathrm{Log}.(1-y) - \Gamma 1 + \Gamma . \frac{1}{1-y};$$

(*Refr. ast.* chap. III, 181). La variable y sera, dans tous les cas, une fraction moindre que l'unité. Si toutefois la série qui donne $\Gamma \frac{1}{1+y}$ et $\Gamma \frac{1}{1-y}$ ne paraît pas converger assez tôt, on prendra, à

volonté, un nombre entier h, de 4 à 6, ce qui suffira pour trouver jusqu'à 8 décimales le logarithme qu'on demande. On aura alors, moyennant les formules des n.os 195 et 204 de l'ouvrage cité :

$$\text{Log. nat. } (+y)! = -h - y - \text{Log.}(1+y)^{h|1} + (h+\tfrac{1}{2}+y)\text{Log.}(1+h+y) - \Gamma 1 + \Gamma\frac{1}{1+h+y},$$

$$\text{Log. nat. } (-y)! = -h + y - \text{Log.}(1-y)^{h|1} + (h+\tfrac{1}{2}-y)\text{Log.}(1+h-y) - \Gamma 1 + \Gamma\frac{1}{1+h-y}.$$

Moyennant ces dernières formules, le calcul des produits $(+y)!$, et par conséquent aussi celui de toutes les facultés numériques à exposans fractionnaires, ainsi que celui des autres fonctions qui pourront y être ramenées, me paraît réduit à sa plus grande simplicité. (*)

(*) On peut encore parvenir au but par la méthode suivante. On sait que, x étant un nombre quelconque, on a

$$\text{Log.}(x!) = \tfrac{1}{2}\text{Log.}2\varpi + x\text{Log.}x + \tfrac{1}{2}\text{Log.}x - M\left\{x - \frac{B_2}{x} - \frac{B_4}{3x^3} - \frac{B_6}{5x^5} - \ldots\right\};$$

M étant le *module*. (Voyez LACROIX, *Traité élémentaire de calcul différentiel*, etc., 2.e édit., pag. 595 ; ou *Traité des différences et des séries*, pag. 142).

Soit fait, dans cette formule, $x = N+y$, N étant un nombre entier arbitraire, mais qu'il conviendra de prendre au moins égal à 10, et y étant la fraction comprise entre 0 et 1 pour laquelle on cherche la valeur de $\text{Log}.y!$. En substituant dans la formule ci-dessus, on obtiendra la valeur de $\text{Log.}(N+y)!$. Mais par les formules de M. Kramp, on a

$$(N+y)! = y!\,(y+1)^{N|1};$$

d'où

$$y! = \frac{(N+y)!}{(y+1)^{N|1}};$$

et, en passant aux logarithmes,

$$\text{Log}.y! = \text{Log.}(N+y)! - \text{Log.}(y+1)^{N|1};$$

donc

$$\text{Log}.y! = \tfrac{1}{2}\text{Log.}2\varpi + (N+y+\tfrac{1}{2})\text{Log.}(N+y) - \text{Log.}(y+1)^{N|1}$$
$$-M\left\{(N+y) - \frac{B_2}{(N+y)} - \frac{B_4}{3(N+y)^3} - \frac{B_6}{5(N+y)^5} - \ldots\right\}.$$

Au surplus, la méthode de M. Kramp paraît beaucoup plus expéditive; et nous n'indiquons celle-ci que pour ceux de nos lecteurs à qui les principes sur lesquels repose la première ne seraient point familiers.

J. D. G.

ANALISE.

Théorie de l'élimination, entre deux équations de degrés quelconques, fondée sur la méthode du plus grand commun diviseur;

Par M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble.



J'ai donné, dans le XV.ᵉ cahier du *Journal de l'école impériale polytechnique*, une théorie de l'élimination, par le plus grand commun diviseur, que j'applique à la résolution de m équations algébriques, de degrés quelconques, entre m inconnues. Cette théorie, pour deux équations seulement, était déjà connue, et même répandue dans la plupart des élémens d'algèbre; mais personne, que je sache, n'avait encore fait connaître le moyen de dégager l'équation finale des racines étrangères qui s'y introduisent nécessairement, par la nature des opérations, et, par suite d'estimer le degré de cette équation, réduite aux seules racines qu'elle doit contenir. J'ai fait réflexion depuis que ce point d'analise pouvait être présenté sous un point de vue beaucoup plus simple, et qui permet d'abréger considérablement les calculs. C'est là ce qui va faire le sujet de ce mémoire.

Soient $X=0$, $X'=0$ deux équations complettes en x et y, ordonnées par rapport à x, la première du degré m et la seconde du degré n. Supposons $m>n-1$; en cherchant le plus grand commun diviseur des premiers membres de ces équations, avec les attentions

prescrites dans le mémoire cité (*), on produira une suite d'équations dont les trois premières seront

$$X = X' q + X'' ,$$
$$Y''^2 X' = X'' q' + X''' ,$$
$$Y'''^2 X'' = X''' q'' + X'''' .$$

Dans ces équations, q, q', q'' sont des quotiens fonctions entières en x et y; Y''^2 et Y'''^2 sont respectivement les quarrés des coefficiens en y des premiers termes des polynomes X'' et X'''.

En vertu de la première équation, toutes les solutions ou couples de valeurs données par les équations $X=0$, $X'=0$, sont aussi données par les équations plus simples $X'=0$, $X''=0$.

La seconde prouve que les solutions de $X'=0$ et $X''=0$ se composent des solutions de $X''=0$ et $X'''=0$, moins les solutions de $Y''^2=0$ et $X''=0$.

Enfin on voit, par la troisième, que pareillement les solutions de $X''=0$ et $X'''=0$ se composent des solutions de $X'''=0$ et $X''''=0$, moins celles de $Y'''^2=0$ et $X'''=0$.

Dénotant donc en général par le symbole $[P, Q]$ la totalité des solutions que fourniraient les équations $P=0$ et $Q=0$, nous aurons

$$[X , X'] = [X' , X''] ,$$
$$[X' , X''] = [X'' , X'''] - [Y''^2 , X''] ,$$
$$[X'' , X'''] = [X''' , X''''] - [Y'''^2 , X'''] ,$$

d'où nous conclurons

$$[X , X'] = [X''' , X''''] - [Y''^2 , X''] - [Y'''^2 , X'''] .$$

Avant de considérer un plus grand nombre d'équations, j'observe

(*) Ces attentions consistent principalement à multiplier tout le dividende, chaque fois qu'on change de diviseur, et avant d'exécuter la division, par le quarré du coefficient du premier terme du diviseur. Par ce procédé, les deux termes du quotient se déterminent de suite, sans aucune difficulté. A la vérité cette préparation peut être superflue dans quelques cas particuliers; mais, comme on a ensuite égard aux racines étrangères qu'elle introduit, elle est absolument sans inconvéniens. J. D. G.

que X'''' doit renfermer Y''^2 comme facteur. En effet, X'', X''', X'''' étant respectivement des polynomes en x des degrés $n-1$, $n-2$, $n-3$, à chaque valeur $y=\beta$, β', β'',...., tirée de l'équation $Y''^2=0$, il correspondra dans l'équation $X''=0$, dont le premier terme disparaîtra, $n-2$ valeurs de x qui devront également satisfaire aux équations $X'''=0$, $X''''=0$; donc X'''', qui est un polynome du degré $n-3$ par rapport à x, devra être nul de lui-même lorsqu'on y fera $y=\beta$, β', β'',....; puisque, dans le cas contraire, une équation aurait plus de racines que d'unités dans son exposant (*). Le calcul prouve, en effet, que X'''' est divisible par Y''^2 (**). Quant à X''', comme pour $y=\beta$, β', β'',...., il reste

(*) Ceux qui ne sont pas accoutumés à la marche de l'analise pourraient croire que ce raisonnement prouve seulement que X'''' est divisible par Y''; mais, bien que l'équation $Y''^2=0$ ait ces racines égales deux à deux, ces racines ne s'en comportent pas moins comme autant de racines distinctes et inégales.

(**) Si, entre les équations

$$Y''^2X'=X''q'+X''', \quad Y'''^2X''=X'''q''+X'''',$$

on élimine X''', il viendra

$$X''''=X''(Y'''^2+q'q'')-q''X'Y''^2;$$

or, comme $q''X'Y''^2$ est divisible par Y''^2, la question se trouve réduite à prouver que $Y'''^2+q'q''$ est aussi divisible par Y''^2.

Pour y parvenir, soient posés

$$X'=A'x^n+B'x^{n-1}+C'x^{n-2}+D'x^{n-3}+\ldots\ldots,$$
$$X''=A''x^{n-1}+B''x^{n-2}+C''x^{n-3}+D''x^{n-4}+\ldots\ldots,$$
$$X'''=A'''x^{n-2}+B'''x^{n-3}+C'''x^{n-4}+D'''x^{n-5}+\ldots\ldots,$$
$$q'=M'x+N', \quad q''=M''x+N'';$$

en sorte qu'on ait

$$Y''=A'', \quad Y'''=A''';$$

il faudra prouver que

$$A'''^2+(M'x+N')(M''x+N''),$$

généralement du degré $n-2$, il s'ensuit qu'à chacune de ces valeurs de y, les équations $X'=0$ et $X''=0$ font connaître les mêmes racines pour x, c'est-à-dire, qu'on a, suivant notre notation, $[Y''^2, X''']=[Y''^2, X'']$.

Soit donc $X''''=\Xi''''Y''^2$, on aura

$$[X''', X'''']=[X''', \Xi''''.Y''^2]=[X''', \Xi'''']+[X''', Y''^2],$$

ou, par ce qui précède,

$$[X''', X'''']=[X''', \Xi'''']+[X'', Y''^2];$$

puis donc on a

$$[X, X']=[X''', X'''']-[Y''^2, X'']-[Y'''^2, X'''],$$

on aura, en substituant,

$$[X, X']=[X''', \Xi'''']-[Y'''^2, X'''];$$

d'où l'on voit que la division de X'''' par Y''^2 a fait évanouir les solutions étrangères $[Y''^2, X'']$ qu'avait introduit la multiplication par Y''^2; la division du reste suivant par Y'''^2 ferait de même évanouir les solutions étrangères $[Y'''^2, X''']$ que la multiplication par ce même facteur a introduite; et l'on voit qu'en général en

---

ou

$$M'M''x^2+(M'N''+N'M'')x+(N'N''+A'''^2)$$

est divisible par A''^2.

Or, d'après les relations qui existent entre X', X'', X''', q', q'', et qui doivent avoir lieu indépendamment de toute détermination de x, on trouve facilement

$$M'=A'A'', \qquad M''=A''A''',$$
$$M'B''+N'A''=B'A''^2, \qquad M''B'''+N''A'''=B''A'''^2,$$
$$M'C''+N'B''+A'''=C'A''^2, \qquad M'D''+N'C''+B'''=D'A''^2;$$

si, après avoir éliminé B''' entre ces équations, on en tire les valeurs de M', N', M'', N'' et A'''^2, comme d'autant d'inconnues, pour les substituer dans la fonction ci-dessus, on se convaincra qu'elle devient, en effet, après les réductions, exactement divisible par A''^2.

J. D. G.

ayant

ayant l'attention de diviser chaque reste, à mesure qu'on opère, par le quarré du coefficient du premier terme de celui des restes précédens dont l'ordre numéral est moins élevé de deux unités; outre que les calculs deviendront plus simples, l'équation finale en y se trouvera absolument délivrée de toute solution étrangère.

Voyons présentement quel sera le degré de cette équation finale.

Représentons simplement les deux équations proposées comme il suit :

$$\{x^m+\ldots\ldots\}=0\ ,\quad \{x^n+\ldots\ldots\}=0\ ;$$

et supposons qu'on opère exactement comme il vient d'être prescrit. Voici le tableau des dividendes successifs égalés aux produits des diviseurs par les quotiens, augmentés des restes dans lesquels on a mis en évidence le facteur à supprimer :

$$\{x^m+\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$
$$=\{x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\}\{x^{m-n}+\ldots\ldots\ldots\ldots\}+\{[y^{m-n+1}+\ldots\ldots]x^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\},$$

$$[y^{m-n+1}+\ldots]^2\{x^n+\ldots\ldots\ldots\ldots\}$$
$$=\{[y^{m-n+1}+\ldots]x^{n-1}+\ldots\}\{[y^{m-n+1}+\ldots]x+\ldots\}+\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\ldots\ldots\},$$

$$[y^{2(m-n+2)}+\ldots]^2\{[y^{m-n+2}+\ldots]x^{n-1}+\ldots\}$$
$$=\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\}\{[y^{3(m-n)+5}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{m-n+1}+\ldots]^2\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\},$$

$$[y^{3(m-n+3)}+\ldots]^2\{[y^{2(m-n+2)}+\ldots]x^{n-2}+\ldots\}$$
$$=\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\}\{[y^{5(m-n)+13}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{2(m-n+2)}+\ldots]^2\{[y^{4(m-n+4)}+\ldots]x^{n-4}+\ldots\},$$

$$[y^{4(m-n+4)}+\ldots]^2\{[y^{3(m-n+3)}+\ldots]x^{n-3}+\ldots\}$$
$$=\{[y^{4(m-n+4)}+\ldots]x^{n-4}+\ldots\}\{[y^{7(m-n)+25}+\ldots]x+\ldots\}+[y^{3(m-n+3)}+\ldots]^2\{[y^{5(m-n+5)}+\ldots]x^{n-5}+\ldots\},$$

. . . .

On voit par là que la forme générale des restes successifs est

$$[y^{k(m-n+k)}+\ldots]x^{n-k}+\ldots\ ;$$

on en déduira la forme du dernier reste en remarquant que, ce dernier reste ne devant plus renfermer x, la valeur de k qui lui est relative, doit être déterminée par la condition $n-k=0$ d'où $k=n$ et $k(m-n+k)=mn$; l'équation finale en y, qui n'est autre chose que ce dernier reste égal à zéro, doit donc être de la forme

$$y^{mn}+\ldots\ldots=0\ ;$$

c'est-à-dire, que *le plus haut degré auquel puisse s'élever l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue, entre deux équations qui en renferment deux, est le produit des nombres qui expriment les degrés respectifs de ces équations.* (*)

Si les équations ne sont pas complètes; si, par exemple, elles sont de la forme

$$\{[y^{m'}+\ldots]x^{m}+\ldots\}=0\ , \qquad \{[y^{n'}+\ldots]x^{n}+\ldots\}=0\ ;$$

il faudra, avant d'exécuter la première division, multiplier le dividende par

$$[y^{n'}+\ldots\ldots]^{m-n+1}\ ;$$

en opérant ensuite comme dans le premier cas, ce multiplicateur se trouvera facteur du second reste, et les restes successifs seront de la forme

$$\{[y^{km'+(n'+k)(m-n+k)}+\ldots]x^{n-k}+\ldots\}\ ;$$

on aura donc pour le dernier reste, qui ne doit pas contenir x, $n-k=0$ ou $k=n$; d'où $km'+(n'+k)(m-n+k)=mn+mn'+m'n=(m+m')(n+n')-m'n'$; l'équation finale sera donc de la forme

$$y^{(m+m')(n+n')-m'n'}+\ldots=0\ ;$$

et, puisque $m+m'$ et $n+n'$ sont les degrés respectifs des équations proposées, il en faut conclure que le degré de l'équation finale sera le produit des degrés des équations proposées diminué du produit des degrés des coefficiens de leurs premiers termes. (**)

(*) On peut voir, dans le mémoire cité, comment l'auteur étend cette théorie à un nombre quelconque d'équations.

(**) Quelque excusable que pourrait être M. Bret de montrer de la prédilection pour des méthodes qu'il a si heureusement perfectionnées; il est loin néanmoins de se faire illusion sur leur insuffisance, et il convient que l'élimination, de quelque manière d'ailleurs qu'on y procède, est une opération à peu près impraticable, dès que les équations sont nombreuses et élevées, à raison de la longueur et de

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstration de quelques formules trigonométriques nouvelles ou peu connues ;

Par M. du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial.



Soit $\varphi(n)$ une fonction quelconque d'un nombre n, que nous supposons essentiellement entier et positif ; convenons, pour abréger, de dénoter simplement par $P\{\varphi(g....h)\}$ le produit de toutes les valeurs que reçoit la fonction $\varphi(n)$, lorsqu'on y met successivement pour n les nombres consécutifs de la suite naturelle g, $g+1$, $g+2$,..., h ; en sorte qu'on ait

$$P\{\varphi(g....h)\}=\varphi(g)\times\varphi(g+1)\times\varphi(g+2)\times....\times\varphi(h).$$

Cette notation admise, le *Théorème de Côte* donne

$$a^{4m}-2a^{2m}b^{2m}\mathrm{Cos}.z+b^{4m}=P\left\{a^2\pm2ab.\mathrm{Cos}.\frac{2(0..m-1)\varpi+z}{2m}+b^2\right\};$$

---

la complication des calculs qu'elle exige. Il désirerait donc que l'on pût déterminer tous les systèmes de valeurs des inconnues qui satisfont à des équations proposées, sans être obligé d'y avoir recours. C'est là, en effet, un sujet qui serait tout à fait digne de fixer l'attention des géomètres. Toute la difficulté du problème se réduirait évidemment à savoir déterminer sans résoudre aucune équation, 1.° les limites extrêmes des valeurs de chacune des inconnues ; 2.° une limite au-dessous de laquelle ne pût tomber la différence entre deux valeurs de chacune de ces mêmes inconnues.

J. D. G.

pourvu qu'on prenne successivement le signe + et le signe — dans le second membre.

En exposant $b=a$, cette formule devient

$$2a^{4m}(1-\text{Cos.}z)=P\left\{2a^2\left[1\pm\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right]\right\};$$

sortant de dessous le signe P le facteur $2a^2$ qui deviendra au dehors $2^{2m}a^{4m}$, remarquant que $1-\text{Cos.}z=2\text{Sin.}^2\frac{1}{2}z$, et divisant par $4a^4$, il viendra

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1\pm\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\};$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1+\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\}\times P\left\{1-\text{Cos.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{1-\text{Cos.}^2\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou

$$\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}z=2^{2m-2}.P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\},$$

ou, en extrayant la racine quarrée

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}z=2^{m-1}.P\left\{\text{Sin.}\frac{2(0...m-1)\varpi+z}{2m}\right\}.$$

Faisant enfin $z=2x$, il viendra

$$\text{Sin.}x=2^{m-1}.P\left\{\text{Sin.}\frac{(0..m-1)\varpi+x}{m}\right\}.$$

En développant le second membre de cette équation, elle deviendra

$$\text{Sin.}x=2^{m-1}.\text{Sin.}\frac{x}{m}.\text{Sin.}\frac{\varpi+x}{m}.\text{Sin.}\frac{2\varpi+x}{m}...\text{Sin.}\frac{(m-2)\varpi+x}{m}.\text{Sin.}\frac{(m-1)\varpi+x}{m}; \quad \text{(I)}$$

mais comme, en général, $\text{Sin.}\frac{(m-n)\varpi+x}{m}=\text{Sin.}\frac{n\varpi-x}{m}$, on pourra encore mettre la même équation sous cette autre forme

$$\mathrm{Sin}.x=2^{m-1}.\mathrm{Sin}.\frac{x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{\varpi+x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{2\varpi+x}{m}\ldots\mathrm{Sin}.\frac{2\varpi-x}{m}.\mathrm{Sin}.\frac{\varpi-x}{m}. \quad \text{(II)}$$

Ces formules assez remarquables en elles-mêmes, conduisent immédiatement à celles que Lacroix a démontrées, d'après Lhuilier, dans son *Traité des différences et des séries* (*). Il suffit, en effet, pour les en déduire, de faire dans l'équation (I), $x=\frac{1}{2}\varpi$, et dans l'équation (II), $x=\frac{1}{4}\varpi$, en multipliant cette dernière par 2. On obtient ainsi

$$1=2^{m-1}\mathrm{Sin}.\frac{1}{m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{3}{m}\frac{\varpi}{2}\ldots\mathrm{Sin}.\frac{2m-3}{m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{2m-1}{m}\frac{\varpi}{2}. \quad \text{(B)}$$

$$\sqrt{2}=2^{m}.\mathrm{Sin}.\frac{1}{2m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{3}{2m}\frac{\varpi}{2}\ldots\mathrm{Sin}.\frac{2m-3}{2m}\frac{\varpi}{2}.\mathrm{Sin}.\frac{2m-1}{2m}\frac{\varpi}{2}. \quad \text{(A)}$$

La formule (B) est un peu plus élégante que celle de Lhuilier, que Lacroix a désignée par la même lettre. La différence nait de ce qu'ici les valeurs de m commencent à l'unité, tandis que, dans la formule de Lhuilier, elles commencent à zéro.

En concentrant, pour plus de brièveté, les seconds membres des équations (B) et (A), et multipliant la première par 2, elles deviennent

$$2=2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\varpi\right\}; \quad \text{(B')}$$

$$\sqrt{2}=2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}; \quad \text{(A')}$$

et il est très-remarquable qu'on obtient la racine quarrée du produit

$$2^{m}P\left\{\mathrm{Sin}.\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\varpi\right\},$$

par la simple substitution de $\frac{\varpi}{2}$ à ϖ.

De cette relation on peut conclure, en quarrant l'équation (A'),

(*) Voyez le n.° 1094, page 431, équations (A) et (B).

$$2^m P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\cdot\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou, en se rappelant que $\text{Sin.}2x=2\text{Sin.}x\text{Cos.}x$

$$2^m P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{2\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\cdot\frac{\varpi}{2}\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou, en remarquant que 2 est m fois facteur dans le second membre,

$$P\left\{\text{Sin.}^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\cdot\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\},$$

ou encore

$$P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}P\left\{\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\};$$

ou enfin

$$P\left\{\text{Sin.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=P\left\{\text{Cos.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}; \qquad \text{(C)}$$

d'où résulte encore

$$P\left\{\text{Tang.}\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}\frac{\varpi}{2}\right\}=1 .$$

Posant $\frac{\varpi}{4m}=\omega$, d'où $m=\frac{\varpi}{4\omega}$, et $2m-1=\frac{\varpi-2\omega}{2\omega}$, il viendra, en substituant dans l'équation (C) et développant,

$$\text{Sin.}\omega\text{Sin.}3\omega\text{Sin.}5\omega\ldots\ldots\text{Sin}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)=\text{Cos.}\omega\text{Cos.}3\omega\text{Cos.}5\omega\ldots\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega); \qquad \text{(D)}$$

équation qui, au surplus, se vérifie aisément d'elle-même, en observant que

$$\text{Sin.}\ \omega=\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\ \omega),$$
$$\text{Sin.}3\omega=\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-3\omega),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-3\omega)=\text{Cos.}3\omega,$$
$$\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\ \omega)=\text{Cos.}\ \omega.$$

Si l'on divise le premier membre de l'équation (D) par le second, et *vice versâ*, il viendra

$$\text{Tang.}\omega\,\text{Tang.}3\omega\ldots\text{Tang.}(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)=\text{Cot.}\omega\,\text{Cot.}3\omega\ldots\text{Cot.}(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)=1\,.$$

L'équation (A) peut être écrite ainsi

$$1=2^{\frac{2m-1}{2}}.\text{Sin.}\frac{\pi}{4m}\,\text{Sin.}\frac{3\pi}{4m}\,\text{Sin.}\frac{5\pi}{4m}\ldots\ldots\text{Sin.}\frac{(2m-1)\pi}{4m}\,;$$

en y mettant pour m la valeur $\frac{\pi}{4\omega}$, et ayant égard à l'équation (D), elle devient

$$\frac{1}{2^{\frac{\pi-2\omega}{4\omega}}}=\text{Sin.}\omega\,\text{Sin.}3\omega\ldots\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)=\text{Cos.}\omega\,\text{Cos.}3\omega\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\pi-\omega)\,.$$

L'équation (II) divisée par $\text{Sin.}\frac{x}{m}$ devient

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}\frac{x}{m}}=2^{m-1}.\text{Sin.}\frac{\pi+x}{m}\,\text{Sin.}\frac{2\pi+x}{m}\,\text{Sin.}\frac{3\pi+x}{m}\ldots\text{Sin.}\frac{(m-1)\pi+x}{m}\,;$$

faisant, dans cette équation, $x=0$; en remarquant qu'alors on doit avoir

$$\frac{\text{Sin.}x}{\text{Sin.}\frac{x}{m}}=m\,,\ (*)$$

il viendra, en divisant par 2^{m-1},

$$\frac{m}{2^{m-1}}=\text{Sin.}\frac{\pi}{m}\,\text{Sin.}\frac{2\pi}{m}\,\text{Sin.}\frac{3\pi}{m}\ldots\text{Sin.}\frac{(m-1)\pi}{m}\,;$$

posant alors $\frac{\pi}{m}=\omega$, d'où $m=\frac{\pi}{\omega}$, il viendra

$$\frac{\pi}{2^{\frac{\pi}{\omega}-1}.\omega}=\text{Sin.}\omega\,\text{Sin.}2\omega\,\text{Sin.}3\omega\ldots\ldots\text{Sin.}(\pi-\omega)\,. \qquad \text{(E)}$$

(*) Voyez mon *Traité de calcul différentiel et intégral*, art. 60.

Or, par l'hypothèse, m étant un nombre entier, $\frac{\varpi}{\omega}$ doit en être un aussi; c'est-à-dire, que ω est un sous-multiple de ϖ. Si, en outre, il est aussi un sous-multiple de $\frac{1}{2}\varpi$, ce qui aura toujours lieu, dans la nouvelle division du cercle, toutes les fois que ω, sous-multiple de ϖ, ne sera pas 8° ou 40°; la série (E) aura un nombre $\frac{\varpi}{\omega}-1$ impair de facteurs; et le $\left(\frac{\varpi}{2\omega}\right)^{me}$ facteur, qui sera le moyen entre tous, sera $\text{Sin.}\frac{1}{2}\varpi=1$; de plus, les $\frac{\varpi}{2\omega}-1$ facteurs situés à la droite de celui-là, seront respectivement égaux aux $\frac{\varpi}{2\omega}-1$ facteurs situés à sa gauche, puisque la somme des arcs également distants des extrêmes et constamment égale à ϖ. Donc, en extrayant la racine quarrée des deux membres de l'équation (E), il viendra

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}.\omega}}\left\{\begin{array}{l}=\text{Sin.}\omega\,\text{Sin.}2\omega\,\text{Sin.}3\omega\ldots\ldots\text{Sin.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\,,\\ =\text{Cos.}\omega\,\text{Cos.}2\omega\,\text{Cos.}3\omega\ldots\ldots\text{Cos.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\,;\end{array}\right.$$

d'où on tire encore les équations

$$1\left\{\begin{array}{l}=\text{Tang.}\omega\,\text{Tang.}2\omega\,\text{Tang.}3\omega\ldots\ldots\text{Tang.}(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\\ =\text{Cot.}\,\omega\,\text{Cot.}\,2\omega\,\text{Cot.}\,3\omega\ldots\ldots\text{Cot.}\,(\tfrac{1}{2}\varpi-\omega)\end{array}\right.$$

Si nous posons $\omega=1°$; nous aurons

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}.\omega}}=\sqrt{\frac{200}{2^{199}}}=\sqrt{\frac{400}{2^{200}}}=\frac{20}{2^{100}}=\frac{10}{2^{99}}\,;$$

en passant donc aux logarithmes de Briggs, nous trouverons

$$\text{Log.Sin.}1°+\text{Log.Sin.}2°+\text{Log.Sin.}3°+\ldots\ldots+\text{Log.Sin.}99°=1-99°\text{Log.}2\,, \quad \text{(F)}$$

$$\text{Log.Tang.}1°+\text{Log.Tang.}2°+\text{Log.Tang.}3.°+\ldots+\text{Log.Tang.}99°=0\,; \quad \text{(G)}$$

mais si au rayon 1 on veut substituer le rayon 1 00000 00000, comme on le fait dans les tables trigonométriques, afin d'éviter les logarithmes négatifs, il faudra ajouter 99 dixaines au second membre

membre de l'équation (F) ; si de plus on veut pousser jusqu'à 100°, cette équation deviendra

$$\text{Log.Sin.}1^\circ+\text{Log.Sin.}2^\circ+\text{Log.Sin.}3^\circ+\ldots+\text{Log.Sin.}100^\circ=1001-99\text{Log.}2\,,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Log.Sin.}1^\circ+\text{Log.Sin.}2^\circ+\text{Log.Sin.}3^\circ+\ldots+\text{Log.Sin.}100^\circ=971,1983.$$

Ainsi pour le rayon 1 00000 00000 et la division centésimale, le produit des sinus naturels de tous les degrés du quart de cercle est un nombre qui a 972 chiffres à sa partie entière.

Si ω, sous-multiple de ϖ, ne l'est pas de $\frac{1}{2}\varpi$, ce qui aura lieu seulement, comme nous l'avons déjà observé, lorsque ω sera égal à 40° ou à 8° ; alors le second membre de l'équation (E) aura un nombre pair de facteurs ; et sa première moitié, dont le dernier facteur sera $\text{Sin}\frac{1}{2}(\varpi-\omega)$, sera égale à la dernière, dont le premier facteur sera $\text{Sin.}\frac{1}{2}(\varpi+\omega)$. Extrayant donc la racine quarrée des deux membres, il viendra

$$\sqrt{\frac{\varpi}{2^{\frac{\varpi}{\omega}-1}\,.\,\omega}}=\text{Sin.}\omega\text{Sin.}2\omega\text{Sin.}3\omega\ldots\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(\varpi-\omega)\,.$$

En faisant successivement $\omega=40^\circ$ et $\omega=8^\circ$, on aura

$$\text{Sin.}40^\circ\text{Sin.}80^\circ=\tfrac{1}{4}\sqrt{5}\,;$$

$$\text{Sin.}8^\circ.\text{Sin.}16^\circ.\text{Sin.}24^\circ.\text{Sin.}32^\circ\ldots\text{Sin.}96^\circ=\frac{5}{4096}\,.$$

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Recherche de quelques propriétés de l'ellipse et de l'ellipsoïde ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

§ I.

Soit

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2 \qquad \text{(A)}$$

l'équation d'une ellipse, rapportée à son centre et à deux diamètres

conjugués quelconques $2a$ et $2b$. On sait qu'une tangente à cette ellipse a pour équation

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2\ , \qquad \text{(B)}$$

x' et y' étant les coordonnées du point de contact, liées entre elles par l'équation (A).

Soient désignées respectivement par a' et b' les distances de l'origine auxquelles cette tangente coupe les axes des x et des y, alors, dans l'équation (B),

$$\text{à} \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \text{ devront répondre } \left\{\begin{matrix} y=b', \\ x=a'\ ; \end{matrix}\right.$$

on aura donc, d'après cela,

$$x'=\frac{a^2}{a'}\ , \quad y'=\frac{b^2}{b'}\ ;$$

substituant donc, dans l'équation (A), il viendra

$$a'^2b^2+b'^2a^2=a'^2b'^2\ ; \qquad \text{(C)}$$

et l'équation de la tangente sera simplement

$$a'y+b'x=a'b'. \qquad \text{(D)}$$

Concevons présentement que a' et b' soient seuls donnés, et que a et b soient deux lignes variables, liées uniquement entre elles par l'équation (C) ; alors cette équation sera celle d'une ellipse, rapportée à deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$.

L'équation (D) sera celle de l'un des côtés d'un parallélogramme inscrit à cette ellipse, de manière que ses diagonales soient les deux diamètres conjugués $2a'$ et $2b'$.

Et, quant à l'équation (A), elle appartiendra à toutes les ellipses qui, ayant même centre que la précédente, et leurs diamètres conjugués dans la même direction que les siens, auront successivement ces diamètres doubles des coordonnées de tous ses points.

Et il est aisé de voir que ces dernières ellipses, inscrites à une suite de parallélogrammes inscrits eux-mêmes à la première ellipse,

seront aussi inscrites au parallélogramme dont il vient d'être question ci-dessus.

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Si, à une ellipse donnée, on inscrit arbitrairement un parallélogramme dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués ; l'ellipse inscrite à ce parallélogramme, de manière à ce qu'elle touche les milieux de ses côtés, se trouvera aussi inscrite au parallélogramme dont les diagonales seraient ceux des diamètres conjugués de la première ellipse, auxquels les côtés de l'autre parallélogramme sont supposés parallèles.

Supposons actuellement que les diamètres conjugués dont il a été question jusqu'ici soient rectangulaires, et soient conséquemment les axes mêmes de la courbe, l'un des parallélogrammes deviendra un rectangle, et l'autre sera un lozange. Or l'équation (C) donne

$$a=\frac{a'}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}\ ,\quad \text{d'où}\quad 4ab=\frac{4a'b}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}\ ;$$

mais $4ab$ exprime l'aire du rectangle inscrit à l'ellipse donnée par l'équation (C) ; donc $\frac{4a'b}{b'}\sqrt{b'^2-b^2}$ exprime aussi cette aire ; or, si l'on égale à zéro le coefficient différentiel de cette expression, pris par rapport à b, il vient

$$b=\pm\frac{b'}{\sqrt{2}}\ ,\quad \text{d'où}\quad a=\pm\frac{a'}{\sqrt{2}}$$

valeurs qui déterminent les quatre sommets du plus grand rectangle inscrit, lequel, comme il est facile de le voir, a pour ses diagonales les diamètres conjugués égaux de l'ellipse, et est conséquemment semblable au rectangle formé par les tangentes aux sommets de cette ellipse.

De là nous pouvons conclure que, de toutes les ellipses inscrites au lozange qui a pour sommets les sommets de la première ellipse, la plus grande est celle qui est inscrite au rectangle dont les diagonales sont les diamètres conjugués égaux de cette première ellipse.

L'ellipse ainsi construite est semblable à la première, et a son aire moitié de la sienne.

Si dans l'équation (C) on fait $b=a$, on aura

$$a=\frac{a'b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}},$$

quantité facile à construire. Alors le rectangle inscrit sera un quarré, et l'ellipse correspondante un cercle ayant pour rayon la valeur de a.

§. II.

Soit

$$b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2, \qquad \text{(E)}$$

l'équation d'un ellipsoïde rapporté à son centre et à trois diamètres conjugués quelconques $2a$, $2b$, $2c$. On sait qu'un plan tangent à cet ellipsoïde a pour équation

$$b^2c^2xx'+a^2c^2yy'+a^2b^2zz'=a^2b^2c^2; \qquad \text{(F)}$$

x', y', z' étant les coordonnées du point de contact, liées entre elles par l'équation (E).

Soient désignées respectivement par a', b', c' les distances de l'origine auxquelles ce plan tangent coupe les axes des x, des y et des z; alors, dans l'équation (F)

$$\text{à} \left\{\begin{matrix} y=0 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \text{devra répondre } x=a',$$

$$\text{à} \left\{\begin{matrix} z=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \text{devra répondre } y=b',$$

$$\text{à} \left\{\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \text{devra répondre } z=c',$$

on aura donc, d'après cela,

$$x'=\frac{a^2}{a'}\ ,\quad y'=\frac{b^2}{b'}\ ,\quad z'=\frac{c^2}{c'}\ ;$$

substituant donc dans l'équation (E), il viendra

$$b'^2c'^2a^2+c'^2a'^2b^2+a'^2b'^2c^2=a'^2b'^2c'^2\ ; \qquad \text{(G)}$$

et l'équation du plan tangent sera simplement

$$b'c'x+c'a'y+a'b'z=a'b'c'\ . \qquad \text{(H)}$$

Concevons présentement que a', b', c' soient seuls donnés, et que a, b, c soient trois lignes variables, liées uniquement entre elles par l'équation (G); alors cette équation sera celle d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$.

L'équation (H) sera celle de l'une des faces de l'octaèdre inscrit à cet ellipsoïde, de manière que ses diagonales soient les trois diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$.

Et quant à l'équation (E), elle appartiendra à tous les ellipsoïdes qui, ayant même centre que le précédent, et leurs diamètres conjugués dans la même direction que les siens, auront successivement ces diamètres doubles des coordonnées de tous ses points.

Et il est aisé de voir que ces derniers ellipsoïdes, inscrits à une suite de parallélipipèdes, inscrits eux-mêmes au premier ellipsoïde, se trouveront aussi inscrits à l'octaèdre dont il vient d'être question ci-dessus.

De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Si, à un ellipsoïde donné, on inscrit arbitrairement un parallélipipède dont les arêtes soient parallèles à trois diamètres conjugués; l'ellipsoïde inscrit à ce parallélipipède, de manière à ce qu'il touche les centres de ses faces, se trouvera aussi inscrit à l'octaèdre dont les diagonales seraient ceux des diamètres conjugués du premier ellipsoïde auxquels les arêtes du parallélipipède sont supposées parallèles.

Supposons présentement que les diamètres conjugués dont il a été question jusqu'ici soient rectangulaires, et soient conséquemment les axes mêmes de l'ellipsoïde ; le parallélipipède sera alors rectangle. Or, l'équation (G) donne

$$a=\frac{a'}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2},\text{ d'ou } 8abc=\frac{8a'bc}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2}\ ;$$

mais $8abc$ exprime le volume du parallélipipède inscrit à l'ellipsoïde donné par l'équation (G) ; donc $\frac{8a'bc}{b'c'}\sqrt{b'^2c'^2-b'^2c^2-c'^2b^2}$ est aussi l'expression de ce volume ; or, si l'on égale à zéro ses deux coefficiens différentiels pris en faisant varier successivement b et c, il viendra

$$b'^2c'^2-2b^2c'^2-c^2b'^2=0\ ;\quad b'^2c'^2-2c^2b'^2-b^2c'^2=0\ ,$$

d'où

$$b=\pm\frac{b'}{\sqrt{3}}\ ,\quad c=\pm\frac{c'}{\sqrt{3}}\ ,\quad a=\pm\frac{a'}{\sqrt{3}}\ ;$$

ces valeurs de a, b, c, déterminent donc les huit sommets du plus grand parallélipipède rectangle inscrit à l'ellipsoïde, lequel, comme il est aisé de le voir, a pour ses diagonales les diamètres conjugués égaux de l'ellipsoïde, et est conséquemment semblable au parallélipipède formé par les plans tangens aux sommets de cet ellipsoïde.

De là, nous pouvons conclure que, de tous les ellipsoïdes inscrits à l'octaèdre qui a ses sommets aux sommets mêmes de l'ellipsoïde donné, le plus grand est celui qui est inscrit au parallélipipède rectangle dont les diagonales sont les diamètres conjugués égaux de ce premier ellipsoïde. L'ellipsoïde ainsi construit est semblable au premier, et son volume est au sien, comme 1 est à $3\sqrt{3}$.

Si l'on fait $c=b=a$, il vient

$$a=\frac{a'b'c'}{\sqrt{a'^2b'^2+b'^2c'^2+c'^2a'^2}}\ ;$$

le parallélipipède inscrit à l'ellipsoïde est alors un cube, et l'ellipsoïde inscrit à ce cube devient une sphère dont le rayon est cette valeur de a.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble,

Au Rédacteur des Annales.

Monsieur et très-cher Confrère,

J'ai l'honneur de vous soumettre quelques remarques qui concernent deux mémoires de votre dernière livraison des *Annales*, et qui me paraissent intéressantes.

§. 1. *Sur la construction des formules qui servent à déterminer la grandeur et la situation des diamètres principaux, dans les lignes du second ordre* (*).

L'équation

$$\text{Tang}.2\alpha=-\frac{b}{a-c},$$

ou, plus généralement

$$\text{Tang}.(2\alpha+k\varpi)=-\frac{b}{a-c},$$

donne l'angle $\alpha+\frac{1}{2}k\varpi$ que fait l'axe des x'' ou des y'' avec l'axe

(*) Voyez la page 332 du 2.e volume des *Annales*.

des x ; on trouve les deux angles α et $\alpha+\frac{1}{2}\pi$; en sorte que la même formule fait connaître les directions des axes des x'' et des y''. Si α désigne l'angle que fait l'axe des x'' avec l'axe des x, il faudra porter sur cet axe des x'', à partir du centre, la valeur

$$A=\sqrt{\frac{2[bde-ae^2-cd^2-(b^2-4ac)f]}{(b^2-4ac)[(a+c)-\sqrt{b^2+(a-c)^2}]}}\ ;$$

ce résultat est vrai, si b est négatif, et il est faux si b est positif.

Soit donnée pour exemple l'équation $y^2+3xy+5x=1$.

Rappelons les formules de mon mémoire (tom. II, p. 218);

$$ay^2+2bxy+cx^2=P\ ,\quad gy'^2+hx'^2=P\ ,$$

$$z^2-(a+c)z+(ac-b^2)=0\ ,$$

$$\text{Sin.}2\alpha=-\frac{2b}{g-h}\ ,\quad \text{Tang.}2\alpha=-\frac{2b}{a-c}\ .$$

En substituant, on trouve

$$z^2-6z+\tfrac{11}{4}=0\ ,\quad \text{d'où}\quad z=\tfrac{11}{2}\quad \text{ou}\quad \tfrac{1}{2}\ ,$$

$$\text{Sin.}2\alpha=\frac{3}{h-g}\ ,\quad \text{Tang.}2\alpha=\tfrac{3}{4}\ ;$$

or, comme Sin.2α doit être positif, il s'ensuit que $g=\frac{1}{2}$, $h=\frac{11}{2}$; donc

$$A^2=\tfrac{2}{11}\ ,\quad B^2=2.$$

En appliquant les formules de M. Rochat, on trouve au contraire

$$A^2=2\ ;\quad B^2=\tfrac{2}{11}.$$

Il est donc très-important de faire attention au double signe du radical, dans les valeurs de M et N, ou dans celles de g et h ; car, sans cette précaution, on déterminerait bien exactement l'ellipse et l'hyperbole, mais très-souvent ces courbes ne seraient point situées comme elles doivent l'être, relativement aux axes primitifs des coordonnées.

§. 2.

§. 2. *Observation sur la démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations.* (*)

L'équation $Ax^n+Bx^{n-1}+\ldots\ldots=y$ établit entre les variables x, y une relation telle qu'à chaque valeur de $x=\alpha$, α', α'', ... il correspond une valeur de $y=\beta$, β', β'', ... Réciproquement, pour $y=\beta$ on doit trouver $x=\alpha$, et par conséquent, il existe une série d'opérations à faire sur $y=\beta$ et les coefficiens A, B, C, ... de manière à obtenir $x=\alpha$ ou, ce qui revient au même, on a

$$\alpha=\varphi(A, B, C, \ldots\ldots \beta) ;$$

et on aura pareillement

$$\alpha'=\varphi'(A, B, C, \ldots\ldots \beta'),$$

$$\alpha''=\varphi''(A, B, C, \ldots\ldots \beta''),$$

....

Il s'agirait donc de démontrer que les fonctions φ, φ', φ'', ... sont les mêmes ou, ce qui revient au même, qu'il faut constamment exécuter sur les différentes valeurs de y la même série d'opérations pour en conclure les valeurs correspondantes de x ; il faudrait prouver en outre qu'à chaque valeur de y, non comprise dans la série β, β', β'', ... il doit nécessairement correspondre une valeur de x ; or, c'est ce qui ne me paraît pas établi par le raisonnement de M. du Bourguet.

J'ai ouï dire, au surplus, que M. Gauss était parvenu à démontrer que toute équation est décomposable en facteurs réels du second degré au plus, sans supposer la décomposition en facteurs du pre-

---

(*) Voyez la page 338 du 2.e volume de ce recueil.

mier degré. S'il en est ainsi, le principe que M. du Bourguet a eu en vue de démontrer, se trouve être une conséquence toute naturelle de celui-là.

Agréez, etc.

Grenoble, le 7 mai 1812.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'alliage proposé à la page 287 du deuxième volume des Annales.



ÉNONCÉ. *Deux vases* A *et* B, *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis, l'un et l'autre, d'un mélange d'eau et de vin dont la proportion est connue pour chaque vase. On a deux mesures égales, dont la contenance commune est* c, *et que l'on plonge en même temps dans les deux vases pour les remplir; après quoi on verse dans chaque vase le liquide tiré de l'autre. On réitère la même opération* n *fois successivement. On demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase?*

Première solution;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Soient X, X', X'', les quantités d'eau qui se trouvent rester dans le vase A, après trois opérations consécutives quelconques,

et Y, Y', Y'' les quantités d'eau correspondantes qui se trouvent dans le vase B.

Par l'opération qui fait passer les quantités d'eau des deux vases de X et Y à X' et Y' on extrait, savoir :

de A une quantité d'eau exprimée par $\frac{c}{a}X$,

de B une quantité d'eau exprimée par $\frac{c}{b}Y$;

on aura donc

$$X'=X-\frac{c}{a}X+\frac{c}{b}Y\,;$$

et on aura pareillement

$$X''=X'-\frac{c}{a}X'+\frac{c}{b}Y'\,;$$

on a d'ailleurs

$$X+Y=X'+Y'\,;$$

éliminant donc Y et Y' entre ces trois équations, il viendra

$$X''=\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X'-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X\,;$$

partant, les quantités d'eau successives contenues dans le premier vase forment une suite récurrente du second ordre, dont l'échelle de relation est

$$+\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right),\quad -\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)\,;$$

cette suite récurrente provient donc du développement d'une fraction dont le dénominateur est

$$1-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x^2,$$

c'est-à-dire,

$$(1-x)\left\{1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x\right\};$$

ou, ce qui revient au même, du développement de la somme de deux fractions de la forme

$$\frac{M}{1-x}, \quad \frac{N}{1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x};$$

or, les termes généraux correspondans de ces développemens sont

$$Mx^n \quad \text{et} \quad N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n x^n;$$

partant

$$X=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n;$$

M et N étant deux constantes qu'il s'agit présentement de déterminer d'après l'état initial du mélange dans les deux vases.

Soient α et β les quantités d'eau qui se trouvaient respectivement dans les deux vases A et B, avant la première opération ; après cette première opération il se trouvera dans le vase A une quantité d'eau exprimée par

$$\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta;$$

ainsi il faut qu'en faisant successivement

$$\left.\begin{array}{l} n=0, \\ n=1, \end{array}\right\} \text{ on ait } \left\{\begin{array}{l} X=\alpha, \\ X=\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta; \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha=M+N,$$

$$\alpha-\frac{c}{a}\alpha+\frac{c}{b}\beta=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right);$$

de là

$$M=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}\,,\quad N=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\,;$$

et partant

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n.$$

De là on déterminera le moment (s'il est possible) où les quantités d'eau contenues dans les deux vases seront entre elles dans un rapport donné, où celui auquel la quantité d'eau contenue dans l'un de ces vases sera égale à une quantité donnée.

Si, dans l'état initial du mélange, les quantités d'eau contenues dans les deux vases sont respectivement proportionnelles aux capacités de ces vases, on a $\alpha:\beta=a:b$; de là $\alpha b-\beta a=0$, et partant

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}=\alpha.$$

Ainsi, dans ce cas particulier, quelque multipliées que soient les opérations, l'état des deux mélanges demeure invariable.

Deuxième solution;

Par M. Tédenat, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes.

Soient après z opérations, X_z la quantité d'eau qui se trouve dans le vase A, et Y_z la quantité d'eau qui se trouve dans le vase B. A la fin de l'opération suivante, ces deux quantités seront devenues respectivement X_{z+1} et Y_{z+1}; or, il est clair que la quantité d'eau qui se trouvera alors dans le vase A sera égale à celle qui s'y trouvait après la z^{me} opération, moins celle que la $(z+1)^{me}$ en a soustraite, plus celle qu'elle y a introduite; ce qui donne sur-le-champ l'équation

$$X_{z+1}=X_z-\frac{c}{a}X_z+\frac{c}{b}Y_z=\left(1-\frac{c}{a}\right)X_z+\frac{c}{b}Y_z\ .$$

Mais, d'un autre côté, si l'on désigne par α et β les quantités d'eau qui se trouvaient respectivement dans les deux vases A et B, avant la première opération, on aura

$$X_z+Y_z=\alpha+\beta\ ,\quad \text{d'où}\quad Y_z=\alpha+\beta-X_z\ ;$$

substituant donc dans l'équation ci-dessus, elle deviendra

$$X_{z+1}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ;$$

équation du premier ordre aux différences, entre les deux variables X et z, dont les coefficiens sont constans, et dont l'intégrale est

$$X_z=a\frac{\alpha+\beta}{a+b}+C\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z\ ;\quad (*)$$

C étant une constante arbitraire.

(*) Voyez le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de M. Lacroix, deuxième édition, page 573.

De l'équation.

$$X_{z+1}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ,$$

on déduit

$$X_{z+2}=\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_{z+1}+\frac{c(\alpha+\beta)}{b}\ ;$$

d'où, en retranchant et transposant,

$$X_{z+2}=\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_{z+1}-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)X_z\ ;$$

équation du second ordre qui rentre dans celle de M. Lhuilier.

Pour l'intégrer, on posera $X_z=p^z$ d'où $X_{z+1}=p^{z+1}$, $X_{z+2}=p^{z+2}$ ce qui donnera, en substituant et divisant par p^z,

$$p^2-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)p+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)=0\ ;$$

d'où

$$p=1\quad \text{et}\quad p=1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\ ;$$

donc

Or, à $z=0$ doit répondre $X_z=\alpha$; donc

$$\alpha=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+C\;,\quad \text{d'où}\quad C=\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\;,$$

et par conséquent

$$X_z=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z.$$

D'après cela, si l'on dénote simplement par X, Y les quantités d'eau, et par X', Y' les quantités de vin contenues respectivement dans les deux vases A et B, après la n^{me} opération; et si en outre α' et β' sont les quantités de vin que renfermaient ces deux vases, avant la première opération; en observant que

$$X'+X'=\alpha+\alpha'=a\;,\qquad X+Y=\alpha+\beta\;,$$
$$Y+Y'=\beta+\beta'=b\;,\qquad X'+Y'=\alpha'+\beta'\;,$$

on trouvera

$$X=a.\frac{\alpha+\beta}{a+b}+\frac{\alpha b-\beta a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n,$$
$$X'=a.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}+\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n,$$
$$Y=b.\frac{\alpha+\beta}{a+b}-\frac{\alpha b-\beta a}{q+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n,$$
$$Y'=b.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b}-\frac{\alpha' b-\beta' a}{a+b}\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n.$$

Parmi une multitude de remarques auxquelles ces formules peuvent donner lieu, nous nous arrêterons aux suivantes.

$\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ étant, dans les cas, deux fractions positives, il en résulte que $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ est toujours compris entre 0 et 2, et que conséquemment $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}$ est toujours fractionnaire et compris entre $+1$ et -1.

$$X_z=M+N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^z.$$

Les constantes M et N se détermineront tant par l'équation du premier ordre que par l'état initial du mélange.

J. D. G.

Donc 1.° les valeurs de X, X', Y, Y' tendent constamment à se réduire à leurs premiers termes, à mesure que n devient plus grand; et elles y tendent de manière à rester toujours au-dessus ou toujours au-dessous, si l'on a $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}<1$ ou $c<\frac{ab}{a+b}$; tandis qu'au contraire elles se trouvent alternativement au-dessus et au-dessous de cette limite, si l'on a $c>\frac{ab}{a+b}$.

2.° Si l'on avait exactement $c=\frac{ab}{a+b}$, d'où $1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}=0$, les valeurs de X, X', Y, Y' atteindraient leurs limites respectives dès la première opération; de manière que les opérations subséquentes n'y changeraient rien, et qu'alors le mélange se trouverait homogène dans les deux vases. Ainsi, en prenant la mesure $c=\frac{ab}{a+b}$, on sera assuré, sans même connaître l'état initial du mélange dans chacun des deux vases, que ce mélange est exactement le même dans l'un et dans l'autre après une seule opération. Et il est de plus aisé de voir que la chose aurait lieu également, lors même que les liquides mêlés dans chacun s'y trouveraient au nombre de plus de deux.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Gnomonique.

1.° TRACER, sur une colonne cylindrique et verticale, portant un chapiteau circulaire, un cadran solaire dont l'heure soit indiquée par l'ombre du chapiteau sur le fust de la colonne?

2.° Décrire sur ce fust, les deux courbes qui terminent les lignes horaires, au solstice d'été et au solstice d'hiver?

3.° Faire une application spéciale des méthodes ou formules auxquelles on sera parvenu, en se donnant, en nombres, les diamètres du chapiteau et du fust de la colonne, ainsi que la latitude du lieu?

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Considérations propres à fournir, dans un grand nombre de cas, des limites extrêmes, très-approchées, des racines des équations numériques;

Par M. DE MAIZIÈRE, professeur de mathématiques des Pages de LL. MM., et professeur de mathématiques spéciales au lycée de Versailles.

I. ON sait que l'emploi des dérivées successives conduit, d'une manière sure, au nombre entier immédiatement supérieur à la plus grande racine additive d'une équation; que cette méthode est très-rapide, si cette plus grande racine est un petit nombre; mais qu'elle devient très-pénible, et pour ainsi dire impraticable, lorsqu'au contraire la plus grande racine additive est un grand nombre, surtout si l'équation est d'un degré un peu élevé.

La méthode que je vais exposer pourra sembler moins générale; mais elle est beaucoup plus rapide, dans le cas où la plus grande racine additive est un grand nombre. Elle est fondée sur un théorème généralement connu; elle n'en est, en quelque sorte, que le développement; et elle est d'ailleurs si variée qu'elle peut être considérée comme satisfaisant à tous les cas.

II. Une équation quelconque $X=0$, peut être représentée comme il suit :

$$x^m+P_1x^{m-1}+P_2x^{m-2}+\ldots-P_ix^{m-i}+\ldots-P_kx^{m-k}+\ldots+P_m=0; \quad (1)$$

$-P_i$ étant son premier coefficient soustractif; et $-P_k$ son coef-

ficient soustractif le plus éloigné de zéro. On sait que, dans cet état de choses, on doit avoir

$$x < 1 + \sqrt[i]{P_k}. \qquad (2)$$

Quoique la démonstration de cette proposition ne soit pas difficile, et qu'elle se trouve dans plusieurs ouvrages élémentaires ; comme on s'est quelquefois mépris sur le sens des mots, et sur la véritable interprétation du résultat ; on ne trouvera peut-être pas mauvais que je reproduise ici cette démonstration.

On aura

$$x < L, \qquad (3)$$

si, L étant substituée à x, dans $X=0$, le résultat est additif, et si les résultats ultérieurs conservent le signe $+$, pour tout nombre substitué $>L$. Or, de la somme des additifs de (1), la plus petite valeur est x^m; et de la somme des soustractifs, la valeur la plus éloignée de zéro est

$$-P_k(x^{m-i}+x^{m-i-1}+x^{m-i-2}+\ldots\ldots+1);$$

valeur qu'elle aurait, en effet, si chaque terme était soustractif depuis le premier soustractif $-P_i x^{m-i}$, et s'ils avaient tous pour coefficiens le coefficient $-P_k$ le plus éloigné de zéro. x sera donc $<L$, si, pour le nombre L, et pour tout nombre supérieur à L, on a

$$L^m > P_k\{L^{m-i}+L^{m-i-1}+L^{m-i-2}+\ldots\ldots+1\}. \qquad (4)$$

Dans cette relation, le polynôme $L^{m-i}+L^{m-i-1}+L^{m-i-2}+\ldots\ldots+1$ est le quotient de la division de $L^{m-i+1}-1$ par $L-1$; donc la condition (4) sera remplie, si la suivante est satisfaite

$$L^m > P_k\left\{\frac{L^{m-i+1}-1}{L-1}\right\}. \qquad (5)$$

Cette dernière peut être mise sous cette autre forme

$$L^m > \frac{P_k L^{m-i+1}}{L-1} - \frac{P_k}{L-1}; \qquad (6)$$

et l'on voit que la condition (6) sera satisfaite par L, et par tout nombre supérieur à L, si l'on a seulement

$$L^m \geqq \frac{P_k L^{m-i+1}}{L-1} \; ; \qquad (7)$$

pourvu toutefois que L soit trouvé >1 ; sans quoi la relation (7) pourrait ne pas entraîner la relation (6). La relation (7), et conséquemment toutes les précédentes seront donc satisfaites, (sauf l'exception qui vient d'être indiquée), si l'on a

$$L^m(L-1) \geqq P_k L^{m-i+1} \, , \qquad (8)$$

ou

$$L^{m-(m-i+1)}.(L-1) \geqq P_k \, , \qquad (9)$$

ou encore

$$L^{i-1}(L-1) \geqq P_k \; ; \qquad (10)$$

or, cette dernière condition sera remplie par L et, *à fortiori*, par tout nombre plus grand que L, si l'on a seulement

$$(L-1)^{i-1}(L-1) = P_k \, , \qquad (11)$$

ou

$$(L-1)^i = P_k \, , \qquad (12)$$

ou enfin

$$L = 1 + \sqrt[i]{P_k} \, . \qquad (13)$$

Maintenant, pour L et pour tout nombre $>L$, la relation (10) sera satisfaite, ainsi que chacune des précédentes, jusqu'à la relation (7) ; et, parce que (13) donne $L>1$, les mêmes nombres qui satisferont à (10) satisferont aussi à (6), et par conséquent à la relation (4) ; donc

$$x < 1 + \sqrt[i]{P_k} \, .$$

III. Voici présentement diverses observations propres à déduire de cette formule une limite très-approchée de la plus grande racine additive, même dans les cas qui paraissent les moins favorables.

1.° Si le premier coefficient soustractif $-P_i$ était précédé d'un coefficient additif P_h, tel qu'on eût

$$P_h \overset{=}{>} P_i ;$$

comme alors le binôme $P_h x^{m-h} - P_i x^{m-i}$ serait additif, pour toute valeur de $x > 1$; on pourrait faire abstraction du signe — qui précède P_i, et considérer comme premier coefficient soustractif le premier $-P_{i'}$ des suivans, qui ne se trouverait précédé d'aucun coefficient additif au moins aussi éloigné de zéro.

2.° Si $-P_k$, coefficient soustractif le plus éloigné de zéro, était précédé d'un coefficient additif P_g, tel qu'on eût

$$P_g \overset{=}{>} P_k ;$$

on pourrait, à ce coefficient, substituer le premier $-P_{k'}$ des suivans, que ne précéderait pas un coefficient additif au moins aussi éloigné de zéro.

3.° Si, le second terme étant négatif, le premier trinôme $x^m - P_1 x^{m-1} + P_2 x^{m-2}$, mis sous la forme $x^{m-2}(x^2 - P_1 x + P_2)$, avait ses deux dernières racines imaginaires ; ce qui arriverait si l'on avait $P_1^2 < 4P_2$; ce trinôme resterait additif, quelque valeur réelle qu'on donnât à x ; on pourrait donc faire abstraction du signe — du second terme, et prendre tant pour premier coefficient soustractif que pour coefficient soustractif le plus éloigné de zéro, ceux des suivans qui satiferaient à ces conditions. A quoi on doit ajouter qu'on pourrait, à l'égard de ces derniers, faire usage des deux remarques précédentes.

4.° Si $-P_i x^{m-i}$ ou $-P_k x^{m-k}$ pouvaient être compris, comme seconds termes, dans des trinômes à racines imaginaires, on pourrait faire abstraction des signes — qui les affectent, et les considérer comme additifs.

5.° Si l'un ou l'autre des termes $-P_i x^{m-i}$, $-P_k x^{m-k}$ peuvent être compris dans un groupe de termes rendus additifs, par une substitution très-inférieure à celle que donne l'usage de la formule, même modifiée, $L = 1 + \sqrt[i]{P_k}$; alors ces termes devront tous être considérés comme s'ils étaient positifs, et il faudra les remplacer par des termes

choisis dans les deux parties restantes du premier membre de l'équation.

6.° Enfin, si l'on pouvait décomposer le premier membre de $X=0$ en plusieurs groupes rendus respectivement additifs par L_1, L_2, L_3,..... tous $<1+\sqrt[i]{P_k}$; on serait sûr que x devrait être inférieur au plus grand de tous les nombres L_1, L_2, L_3,...

IV. *EXEMPLE I.* Soit l'équation

$$x^5+23x^4-10x^3+5x^2-400x+8500=0. \quad (1)$$

On sait que la formule indiquée par Lacroix donnerait $L=401$. Le premier usage de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=21$. On peut modifier cette limite en écrivant l'équation (1) comme il suit

$$\begin{array}{l} x^5+10x^4-10x^3+5x^2-400x+8500=0\ ; \quad (2) \\ \quad +13x^4 \end{array}$$

or, comme le binôme $10x^4-10x^3$ est toujours additif, pour $x>1$, la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=1+\sqrt[4]{400}$ ou $L=6$.

On peut encore écrire la proposée sous la forme

$$x^5+10(x^4-x^3)+5x^2+13x(x^3-30)-10x+8500=0\ ; \quad (3)$$

et, comme le 4.e terme est rendu additif par $x=4$, on a $L=4$.

Enfin la proposée peut être écrite comme il suit

$$x^5+10(x^4-x^3)+13x^4+5(x^2-80x+1700)=0\ ; \quad (4)$$

et, comme le trinôme $x^2-80x+1700$ a ses racines imaginaires, on a $L=1$.

EXEMPLE II. Soit l'équation

$$x^6-30x^5+260x^4+3x^3-1000x^2-40000x-8600=0. \quad (1)$$

Le premier emploi de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=40001$. Mais, en écrivant la proposée sous la forme

$$x^4(x^2-30x+226)+34x^4+3x^3-1000x^2-40000x-8600=0\ ; \quad (2)$$

comme les racines du trinôme $x^2-30x+226$ sont imaginaires, on pourra prendre $L=1+\sqrt[4]{40000}$ ou $L=16$.

On peut encore écrire la proposée comme il suit:

$$x^4(x^2-30x+226)+3x^3+34x^2\left(x^2-\tfrac{1000}{14}\right)-40000x-8600=0\ ; \quad (3)$$

x, par ce qui précède, devant être >6, on peut faire abstraction du terme $34x^2(x^2-\frac{1000}{14})$, toujours additif, pour toute valeur de x au-dessus de cette limite ; on pourra donc prendre $L=1+\sqrt[5]{40000}$, pourvu que cette valeur ne soit pas inférieure à 6 ; elle peut donc être admise, car elle donne $L=10$.

EXEMPLE III. Soit l'équation

$$x^3-7x+7=0. \qquad (1)$$

Ce cas est un des plus favorables à la méthode des dérivées successives, qui donne bientôt $L=2$. Le premier usage de la formule $1+\sqrt[i]{P_k}$ donne $L=4$; mais, en mettant la proposée sous la forme

$$x(x^2-7)+7=0\ , \qquad (2)$$

on trouve $L=3$. Ainsi, dans les cas même les plus défavorables, la méthode que je viens d'exposer ne le cède guère à celle des dérivées.

Je ne dirai rien de la limite des racines soustractives, dont la recherche peut toujours, comme l'on sait, être ramenée à ce qui précède.

ANALISE TRANSCENDANTE.

De l'intégration des équations linéaires d'un ordre quelconque, à coefficiens constans, dans le cas des racines égales ;

Par M. F. M.



A M. LE RÉDACTEUR DES *ANNALES*,

MONSIEUR,

On sait qu'en procédant à l'intégration des équations linéaires, à coefficiens constans, la substitution de e^{mx} au lieu de y, semble

en défaut, lorsque deux ou un plus grand nombre de racines de l'équation en m sont égales entre elles ; et que d'Alembert publia en 1748, une méthode très-ingénieuse pour écarter cette difficulté. Cependant, quel que soit le mérite de cette méthode, adoptée par Euler, dans son calcul intégral, et depuis par les auteurs de tous les traités sur cette matière, il m'a semblé qu'elle laissait à désirer un procédé plus rigoureux.

Je n'ignore pas qu'au fond le moyen employé par d'Alembert, et par les autres géomètres après lui, peut être entièrement justifié, soit par des considérations tirées de la théorie des limites, soit en faisant adroitement disparaître dans les termes à conserver (par un calcul un peu long quand il y a plus de deux racines égales) la quantité infiniment petite dont on a supposé que les racines venaient à différer. Mais cette petite différence k que, dans tous les traités que je connais, l'on annulle, sans que les quantités ck, ck^2, ck^3,... deviennent nulles en même temps, occasione toujours de l'embarras aux commençans, qui ne peuvent pas encore saisir le véritable esprit de la démonstration.

Je pense donc que la méthode suivante, qui n'est point sujette aux mêmes difficultés, et qui a l'avantage de donner immédiatement l'expression générale de l'intégrale, quels que soient l'ordre de l'équation et le nombre des racines égales, pourrait être introduite, avec avantage, dans les élémens ; et c'est pour lui donner la publicité nécessaire que je me suis déterminé, Monsieur, à vous l'adresser.

§. I. *Cas où toutes les racines sont égales.*

Soit l'équation

$$d^n y + A d^{n-1} y . dx + B d^{n-2} y . dx^2 + \ldots . + N y dx^n = 0 \; ; \qquad (P)$$

on sait que son intégrale complette est

$$y = a' e^{m'x} + a'' e^{m''x} + a''' e^{m'''x} + \ldots . + a^{(n)} e^{m^{(n)} x} \; ;$$

m', m'', m''',....$m^{(n)}$ étant les n racines de l'équation

$$m^n + A m^{n-1} + B m^{n-2} + \ldots . + N = 0 \, , \qquad (Q)$$

qui provient de la substitution de e^{mx}, au lieu de y, dans l'équation (P)

Quand toutes les racines de l'équation (Q) sont égales entre elles et à m, l'intégrale assignée se réduit à

$$y=(a'+a''+a'''+\ldots\ldots+a^{(n)})e^{mx}=\alpha.e^{mx} ;$$

mais cette valeur de y n'est plus qu'une intégrale *particulière*, puisqu'elle ne renferme qu'une seule constante arbitraire α.

La simple substitution de e^{mx}, au lieu de y, paraît donc être ici en défaut, et ne pouvoir faire connaître la véritable intégrale de la proposée (P).

Cependant, puisque cette substitution satisfait toujours à l'équation différentielle, et puisque le défaut apparent de la méthode dépend d'une certaine relation existante entre les coefficiens constans A, B, ... N; supposons

$$y=u.e^{mx} ;$$

u étant une fonction de x qu'on peut espérer de déterminer en telle sorte que l'intégrale renferme le nombre de constantes arbitraires nécessaire à la question.

Remarquons auparavant que, dans le cas où l'équation (Q) a toutes ses racines égales, comme elle est équivalente à $(m-m)^n=0$, on a

$$A=-\frac{n}{1}.m ,$$

$$B=+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}m^2 ,$$

$$C=-\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}m^3 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$N=\pm m^n ;$$

le signe supérieur ou le signe inférieur devant être pris, dans la valeur de N, suivant que n est pair ou impair.

En

En conséquence, la proposée devient

$$d^ny-\frac{n}{1}d^{n-1}y.mdx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}y.m^2dx^2-\ldots\pm m^ndx^n=0\ ;$$

or, on sait que, lorsqu'une fonction y est de la forme $u.t$, u et t étant des fonctions de x, on a

$$d^ny=d^n(u.t)=(du+dt)^n\ ,$$

pourvu qu'on écrive le développement avec les précautions convenables; c'est-à-dire, qu'on a

$$d^ny=td^nu+\frac{n}{1}d^{n-1}u.dt+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}u.d^2t+\ldots+u.d^nt\ ;$$

mais, quand $t=e^{mx}$, on a, par la nature de la fonction e^{mx},

$$d^nt=t.(mdx)^n\ ;$$

donc,

$$d^ny=t(d^nu+\frac{n}{1}d^{n-1}u.mdx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}u.m^2dx^2+\ldots+u.m^ndx^n);\ (\mathrm{R})$$

mais la forme de la proposée, dans le cas actuel, est

$$d^ny=\frac{n}{1}d^{n-1}y.mdx-\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}y.m^2dx^2+\ldots\mp m^ndx^n\ ;$$

en mettant donc, dans le second membre de cette dernière équation, au lieu de $d^{n-1}y$, $d^{n-2}y$,..., leurs valeurs en t, u, x, tirées de la forme générale (R), égalant ensuite entre elles les deux valeurs de d^ny, et divisant de part et d'autre par t, on aura l'équation identique

$$\left.\begin{array}{r}d^nu+\frac{n}{1}d^{n-1}u.mdx+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}u.m^2dx^2+\ldots\\ -\frac{n}{1}d^{n-1}u.mdx-2\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}u.m^2dx^2-\ldots\\ +\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}d^{n-2}u.m^2dx^2+\ldots\\ -\ldots\end{array}\right|=0.$$

ce qui donne $d^n u = 0$; et, en intégrant,

$$u = a' + a''x + a'''x^2 + \ldots + a^{(n)}x^{n-1};$$

donc

$$y = u.e^{mx} = (a' + a''x + a'''x^2 + \ldots + a^{(n)}x^{n-1}).e^{mx};$$

valeur qui, renfermant n constantes arbitraires, est l'intégrale *complette* de la proposée (P).

§. II. *Cas où quelques racines seulement sont égales.*

Lorsqu'il n'y a que p racines de l'équation (Q) qui soient égales entre elles et à m; n étant supposé égal à $p+q$ l'intégrale se réduit à

$$y = (a' + a'' + \ldots + a^{(p)})e^{mx} + a^{(p+1)}e^{m^{(p+1)}x} + \ldots + a^{(p+q)}e^{m^{(p+q)}x};$$

ou

$$y = \alpha.e^{mx} + a^{(p+1)}e^{m^{(p+1)}x} + \ldots + a^{(p+q)}e^{m^{(p+q)}x};$$

intégrale qui n'est que *particulière*, puisqu'au lieu de n ou $p+q$ constantes arbitraires, elle n'en renferme que $1+q$.

Dans ce cas, l'équation (Q) revient à

$$(m-m)^p.(m-m^{(p+1)}).\ldots.(m-m^{(p+q)}) = 0.$$

Considérons séparément le premier facteur, et posons l'équation

$$m^p + A'm^{p-1} + B'm^{p-2} + \ldots + H' = 0. \qquad (Q')$$

Il est évident, par le cas général que nous venons de traiter, que cette équation se rapporte à l'équation différentielle

$$d^p y + A'd^{p-1}y.dx + B'd^{p-2}y.dx^2 + \ldots + H'y dx^p = 0, \qquad (P')$$

dont toutes les solutions $y = e^{mx}$ seraient égales entre elles; en sorte que son intégrale se présenterait sous la forme *particulière* $y = \alpha.e^{mx}$.

Si donc, en raisonnant comme dans le cas général, nous instituons les mêmes calculs, nous trouverons, pour l'intégrale complette de cette équation (P'),

$$y=u.e^{mx}=(a'+a''x+a'''x^2+\ldots.+a^{(p)}x^{p-1}).e^{mx}\ ;$$

valeur qui renfermera p constantes arbitraires.

Mais, d'après la propriété des équations différentielles linéaires, l'on sait que, si l'on a n valeurs particulières de y, leur somme donne immédiatement l'expression générale de cette fonction.

Donc, en réunissant la valeur précédente de y aux solutions fournies par les q facteurs inégaux de l'équation (Q), lesquelles renferment chacune une constante arbitraire, nous aurons enfin pour intégrale *complette* de la proposée (P)

$$y=(a'+a''x+a'''x^2+\ldots+a^{(p)}x^{p-1}).e^{mx}+a^{(p+1)}.e^{m^{(p+1)}x}+\ldots+a^{(p+q)}e^{m^{(p+q)}x}.$$

J'ai l'honneur, etc.

Périgueux, le 27 juin 1812.

ANALISE.

Doutes et réflexions, sur la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations algébriques de tous les degrés;

Par M. Gergonne.



Deux mémoires, sur la résolution générale des équations, viennent de paraître successivement, dans l'intervalle de quelques mois. M. Coytier qui, peu avant, avait déjà publié quelques observations sur les équations algébriques (*), est l'auteur du premier de ces

(*) Brochure in-4.° de 16 pages, chez Eberhart, rue du Foin-St-Jacques, n.° 12, à Paris.

deux mémoires (*), dont j'aurais, très-volontiers, rendu compte dans ce recueil, si l'auteur avait exposé ses idées d'une manière plus précise, et qui prêtât moins à l'arbitraire. M. Wronski, déjà connu par un ouvrage très-remarquable (**), est l'auteur du second (***). Ce dernier mémoire renferme proprement une méthode; et cette méthode, dont l'auteur promet de développer les principes dans un ouvrage plus étendu, s'y trouve exposée avec autant de netteté que de concision. M. Vronski admet en principe que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_m$ désignant les m racines m^{mes} de l'unité, et m étant le degré d'une équation en x, privée de son second terme, les racines $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ de cette équation peuvent toujours être mises sous cette forme

$$\left.\begin{array}{l}
x_1=\rho_1\sqrt[m]{\xi_1}+\rho_1^2\sqrt[m]{\xi_2}+\rho_1^3\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots\ldots+\rho_1^{m-1}\sqrt[m]{\xi_{m-1}},\\
x_2=\rho_2\sqrt[m]{\xi_1}+\rho_2^2\sqrt[m]{\xi_2}+\rho_2^3\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots\ldots+\rho_2^{m-1}\sqrt[m]{\xi_{m-1}},\\
x_3=\rho_3\sqrt[m]{\xi_1}+\rho_3^2\sqrt[m]{\xi_2}+\rho_3^3\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots\ldots+\rho_3^{m-1}\sqrt[m]{\xi_{m-1}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m=\rho_m\sqrt[m]{\xi_1}+\rho_m^2\sqrt[m]{\xi_2}+\rho_m^3\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots\ldots+\rho_m^{m-1}\sqrt[m]{\xi_{m-1}},
\end{array}\right\} \quad (A)$$

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{m-1}$ étant des quantités à déterminer, que M. Wronski appelle les *parties constituantes* des racines, et qu'il suppose devoir être, dans tous les cas, les racines d'une même équation du $(m-1)^{me}$ degré, qu'il appelle la *réduite*, parce qu'en effet c'est à la résolution de celle-ci que doit se réduire celle de la proposée.

(*) Brochure in-4.° de 16 pages et deux tableaux, chez le même libraire.

(**) Voyez le 2.e volume de ce recueil, page 65.

(***) Brochure in-4.° de 16 pages, chez Klostermann fils, rue du Jardinet, n.° 13, à Paris.

Il n'est donc question que de former cette réduite, et voici, pour cela, comment l'auteur procède. Il pose, sans les démontrer, m équations, qu'il appelle *fondamentales*, entre deux classes distinctes de fonctions des racines de la proposée. Les fonctions de la première classe, au nombre de m^{m-1}, sont celles que M. Wronski a désignées par la caractéristique hébraïque *Aleph*, dans sa *Philosophie des mathématiques* : ce sont les développemens des m^{m-1} premières puissances de la somme des racines de la proposée, dont les termes seraient privés de leurs coefficiens numériques. Les fonctions de la seconde classe, au nombre de m^{m-2} seulement, que l'auteur désigne par le symbole Ω, et sur lesquelles je reviendrai tout à l'heure, sont telles qu'en y substituant pour x_1, x_2, x_3, ... x_m leurs valeurs hypothétiques, données par les formules (A), elles deviennent des fonctions rationnelles et symétriques des élémens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_{m-1}; et comme, d'un autre côté, les fonctions *Aleph* sont réductibles en fonctions des coefficiens de la proposée, soit immédiatement, par les principes connus, soit, plus commodément, à l'aide d'une loi de dérivation que M. Wronski indique, il en résulte que les équations fondamentales peuvent être amenées à ne plus renfermer que les coefficiens de la proposée, combinés symétriquement avec les élémens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_m.

Ces équations, ainsi transformées, se trouvant en nombre supérieur d'une unité à celui des élémens qu'elles contiennent; l'auteur prescrit d'en éliminer tous ces élémens, excepté un quelconque, qu'il désigne simplement par ξ, et pour la détermination duquel il obtient conséquemment deux équations, dont les degrés, en supposant que l'on procède à l'élimination de la manière la plus simple, paraissent devoir être $1.2.3....(m-1)$ pour l'une, et $1.2.3....(m-2)m$ pour l'autre. M. Wronski affirme que les premiers membres de ces deux équations auront un commun diviseur qui sera du $(m-1)^{me}$ degré seulement, et qui, égalé à zéro, sera la réduite cherchée.

Ce procédé réussit complettement pour le troisième degré; mais je n'ai pas eu, je l'avoue, le courage d'en terminer l'application

au quatrième, où l'on est obligé de calculer 16 fonctions Ω et 64 fonctions *Aleph*. Il n'y a même guère d'apparence que personne songe à l'étendre au cinquième degré, pour lequel les Ω doivent être au nombre de 125 et les *Aleph* au nombre de 625; et où il faut finalement chercher le plus grand commun diviseur entre deux polynomes, l'un du 24me et l'autre du 30me degrés.

Quant aux fonctions désignées par le symbole Ω; sans expliquer ici en détail la loi de leur formation, ce qui ne se pourrait sans donner à cet article plus d'étendue que le mémoire de M. Wronski n'en a lui-même, je me bornerai à dire qu'elles sont formées, d'une manière régulière, avec les sommes de puissances des degrés m, $2m$, $3m$;...., $m^{m-2}.m$ des valeurs hypothétiques des racines de la proposée, exprimées par les formules (A); en supposant qu'après avoir développé ces sommes de puissances, on supprime dans leurs développemens tous les termes irrationnels. Cette précaution est au surplus inutile, pour le troisième degré, où les termes radicaux s'évanouissent d'eux-mêmes par les propriétés des racines de l'unité; mais il n'en est plus ainsi pour les degrés plus élevés. Si donc M. Wronski n'avait déjà donné des preuves de son profond savoir, on serait tenté de craindre qu'il ne se fût laissé égarer ici par l'analogie, et qu'il n'ait cru trop légèrement que, les termes affectés de radicaux disparaissant d'eux-mêmes dans le troisième degré, ils devaient également disparaître dans les degrés plus élevés.

M. Wronski croit être le premier à n'avoir pas fait subir de modifications à ses méthodes, pour les appliquer au 4.me degré; mais il me semble qu'en cela il se trompe. La forme qu'il assigne aux racines, dans tous les degrés, est, en effet, exactement celle que Bezout leur avait assignées avant lui (*), avec cette seule différence qu'au lieu des quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3,....ξ_{m-1}, ce sont les quantités $\sqrt[m]{\xi_1}$, $\sqrt[m]{\xi_2}$, $\sqrt[m]{\xi_3}$,....$\sqrt[m]{\xi_{m-1}}$ que Bezout cherche à déter-

(*) Voyez le volume d'algèbre de son *Cours*, à l'usage de la marine. Voyez aussi les *Mémoires de l'académie des sciences de Paris*, pour 1762 et 1765.

miner. Cela doit, à la vérité, élever un peu plus le degré des diverses équations ; mais en posant

$$a=-\sqrt[m]{\xi_{m-1}}\ ,\quad b=-\sqrt[m]{\xi_{m-2}}\ ,\quad c=-\sqrt[m]{\xi_{m-3}}\ ,\ldots,$$

on rendra tous les calculs de Bezout immédiatement applicables aux formules de M. Wronski.

Ce rapprochement entre les deux méthodes semblerait nous autoriser à douter du succès de la dernière, même dès le 4.me degré. Il paraît, en effet, résulter de l'analise de Bezout que, dans ce cas particulier ξ_1, ξ_2, ξ_3 ne sauraient être, comme l'annonce M. Wronski, les racines d'une même équation du 3.me degré ; mais que, tandis que ξ_2 est donné, à part, par une équation du 3.me degré, ξ_1 et ξ_3 se trouvent donnés simultanément, par une équation du 6.me. Il pourrait se faire, au surplus, que la méthode de M. Wronski, exacte seulement lorsque m est un nombre premier, dût être modifiée dans le cas contraire.

M. Wronski observe, en terminant son mémoire, que, dans la question qui vient de l'occuper, le point capital est la connaissance de la forme que les racines doivent affecter. Il est très-vrai, en effet, que si, pour tous les degrés, les racines devaient avoir la forme que l'auteur leur assigne, et si sur-tout les quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_{m-1} devaient être, comme il le prétend, les racines d'une même équation du $(m-1)$me degré ; le problème de la résolution générale des équations algébriques pourrait, par cela seul, être regardé comme complètement résolu. On va même voir que, dans cette hypothèse, on pourrait, pour chaque degré, parvenir à la réduite par une méthode qui, en même temps qu'elle serait incomparablement plus courte que celle qu'indique M. Wronski, aurait en outre l'avantage de porter avec elle sa démonstration.

Soit, en effet, n un nombre entier quelconque, moindre que m Soient multipliées respectivement les équations (A) par ρ_1^n, ρ_2^n, ρ_3^n, ... ρ_m^n. En prenant la somme des produits, et se rappelant que

$$\rho_1^{n+1}+\rho_2^{n+1}+\rho_3^{n+1}+\ldots\ldots+\rho_m^{n+1}=0\;;$$
$$\rho_1^{n+2}+\rho_2^{n+2}+\rho_3^{n+2}+\ldots\ldots+\rho_m^{n+2}=0\;,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;,$$
$$\rho_1^{m}\;+\rho_2^{m}\;+\rho_3^{m}+\ldots\ldots+\rho_m^{m}\;=m\;,$$
$$\rho_1^{m+1}+\rho_2^{m+1}+\rho_3^{m+1}+\ldots\ldots+\rho_m^{m+1}=0\;,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;,$$

il viendra

$$\rho_1^n x_1+\rho_2^n x_2+\rho_3^n x_3+\ldots\ldots+\rho_m^n x_m=m\sqrt[m]{\xi_{m-n}}\;,$$

d'où

$$\xi_{m-n}=\frac{1}{m^m}\left\{\rho_1^n x_1+\rho_2^n x_2+\rho_3^n x_3+\ldots\ldots+\rho_m^n x_m\right\}^m\;;$$

faisant successivement, dans ce dernier résultat, $n=m-1$, $m-2$ $m-3$, ... 2, 1, il viendra

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1\;&=\frac{1}{m^m}\left\{\rho_1^{m-1}.x_1+\rho_2^{m-1}.x_2+\rho_3^{m-1}.x_3+\ldots\ldots+\rho_m^{m-1}.x^m\right\}^m,\\
\xi_2\;&=\frac{1}{m^m}\left\{\rho_1^{m-2}.x_1+\rho_2^{m-2}.x_2+\rho_3^{m-2}.x_3+\ldots\ldots+\rho_m^{m-2}.x^m\right\}^m,\\
\xi_3\;&=\frac{1}{m^m}\left\{\rho_1^{m-3}.x_1+\rho_2^{m-3}.x_2+\rho_3^{m-3}.x_3+\ldots\ldots+\rho_m^{m-3}.x^m\right\}^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\xi_{m-1}&=\frac{1}{m^m}\left\{\rho_1.x_1\;+\rho_2.x_2\;+\rho_3.x_3\;+\ldots\ldots+\rho_m\,.\,x^m\right\}^m.
\end{aligned}\right\}(B)$$

Avec ces valeurs il sera facile de former, en fonction de x_1, x_2, x_3, ... x_m, les divers coefficiens de la réduite; et, si les assertions de M. Wronski sont exactes, ces coefficiens devront, après le développement et les réductions résultant des propriétés des racines $m.^{\text{me}}$ de l'unité, se réduire à de simples fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3, ... x_m, exprimables conséquemment par des fonctions rationnelles des coefficiens de la proposée.

Quelque

Quelque simple que soit cette méthode, comparée à celle de M. Wronski, elle est susceptible encore de quelques perfectionnemens qu'il convient de ne pas négliger. En premier lieu, en affectant les seconds membres des équations (A) du dénominateur commun m, ce qui est permis, tant que les élémens $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{m-1}$ ne sont pas encore déterminés, on parvient évidemment à délivrer les valeurs de ces élémens du coefficient $\frac{1}{m^m}$ qui les affectent toutes.

En second lieu, soit désignée simplement par ρ une racine m^{me} de l'unité qui ne soit pas, en même temps, racine de l'unité, d'un degré inférieur à m, ainsi qu'il pourrait arriver si, ρ étant pris au hasard, m n'était pas un nombre premier. On pourra remplacer $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_m$ par $\rho, \rho^2, \rho^3, \ldots \rho^m$ ou 1. Il n'entrera donc, dans les calculs, qu'une seule racine de l'unité ; et l'on n'aura besoin, pour opérer les réductions, que d'avoir égard aux seules équations

$$\rho^m=1 \quad \text{et} \quad 1+\rho+\rho^2+\rho^3+\ldots+\rho^{m-1}=0.$$

Ainsi, en posant, pour les valeurs hypothétiques des racines,

$$\left.\begin{array}{l}
x_1=\frac{1}{m}\left\{\rho\sqrt[m]{\xi_1}+\rho^2\sqrt[m]{\xi_2}+\rho^3\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots+\rho^{m-1}\sqrt[m]{\xi_{m-1}}\right\}, \\
x_2=\frac{1}{m}\left\{\rho^2\sqrt[m]{\xi_1}+\rho^4\sqrt[m]{\xi_2}+\rho^6\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots+\rho^{2(m-1)}\sqrt[m]{\xi_{m-1}}\right\}, \\
x_3=\frac{1}{m}\left\{\rho^3\sqrt[m]{\xi_1}+\rho^6\sqrt[m]{\xi_2}+\rho^9\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots+\rho^{3(m-1)}\sqrt[m]{\xi_{m-1}}\right\}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_m=\frac{1}{m}\left\{\sqrt[m]{\xi_1}+\sqrt[m]{\xi_2}+\sqrt[m]{\xi_3}+\ldots+\sqrt[m]{\xi_{m-1}}\right\},
\end{array}\right\} \quad (A')$$

on aura

$$\begin{array}{l}
\xi_1 \;\;=\{\rho^{m-1}.x_1+\rho^{2(m-1)}.x_2+\rho^{3(m-1)}.x_3+\ldots+x_m\}^m, \\
\xi_2 \;\;=\{\rho^{m-2}.x_1+\rho^{2(m-2)}.x_2+\rho^{3(m-2)}.x_3+\ldots+x_m\}^m, \\
\xi_3 \;\;=\{\rho^{m-3}.x_1+\rho^{2(m-3)}.x_2+\rho^{3(m-3)}.x_3+\ldots+x_m\}^m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\xi_{m-1}=\{\rho\;.x_1+\rho^2\;.x_2+\rho^3\;.x_3+\ldots+x_m\}^m;
\end{array}$$

sur quoi il faut remarquer qu'en vertu de l'équation $\rho^m=1$, on pourra substituer aux exposans de ρ supérieurs à $m-1$ le reste de leur division par m.

Si l'on veut appliquer cette méthode à l'équation du troisième degré, sans second terme, $\quad x^3+px+q=0$,

on posera
$$x_1=\tfrac{1}{3}\{\rho\sqrt[3]{\xi_1}+\rho^2\sqrt[3]{\xi_2}\}\,,$$
$$x_2=\tfrac{1}{3}\{\rho^2\sqrt[3]{\xi_1}+\rho\sqrt[3]{\xi_2}\}\,,$$
$$x_3=\tfrac{1}{3}\{\sqrt[3]{\xi_1}+\sqrt[3]{\xi_2}\}\,;$$

il viendra ainsi
$$\xi_1=(\rho^2x_1+\rho x_2+x_3)^3\,,$$
$$\xi_2=(\rho x_1+\rho^2x_2+x_3)^3\,;$$

d'où on conclura, en développant, et faisant usage de l'équation $1+\rho+\rho^2=0$,
$$\xi_1+\xi_2=\begin{cases} 2(x_1^3+x_2^3+x_3^3) \\ -3(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2) \\ +12x_1x_2x_3\,, \end{cases}$$
$$\xi_1\xi_2=\{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\}^3\,;$$

remplaçant les fonctions symétriques des racines de la proposée par les fonctions équivalentes des coefficiens p et q, il viendra
$$\xi_1+\xi_2=-27q\,,\quad \xi_1\xi_2=-27p^3\,;$$

la réduite cherchée sera donc
$$\xi^2+27q\xi-27p^3=0.$$

Maintenant donc que M. Wronski a entre les mains un moyen beaucoup plus court, et peut-être plus direct que le sien, pour former ses diverses réduites, c'est à lui de voir si, en effet, ses principes se vérifient au delà du troisième degré. Il ne s'agit ici, j'en conviens, que d'*un travail purement mécanique*; mais ce travail est néanmoins nécessaire pour légitimer à nos yeux les méthodes de M. Wronski, jusqu'à ce qu'il nous ait *clairement* développé les principes sur lesquel il les a fondées.

J'apprends, à l'instant, que le même géomètre vient de publier le *Prospectus* d'une *RÉFUTATION* de la *Théorie des fonctions analitiques* de M. LAGRANGE. J'ignore ce que peut signifier le mot *réfutation*, dans la langue de M. Wronski, laquelle, comme l'on sait, n'est pas celle de tout le monde. Mais, suivant l'acception commune, pour qu'un ouvrage soit susceptible d'être *réfuté*, il faut non seulement que cet ouvrage renferme des erreurs, mais que, de plus, ces erreurs y soient prédominantes, et qu'elles en constituent, pour ainsi dire, l'essence et le fondement; or, je ne sache pas que rien de pareil existe dans le livre des *Fonctions*. Que M. Wronski consacre un ouvrage à défendre la méthode de *Leibnitz* contre celle de M. *Lagrange*, à lui permis, sans doute. Il pourra même trouver beaucoup de gens de son parti, aujourd'hui sur-tout, où l'on aime tant à rétrograder en toutes choses. Mais un tel ouvrage ne sera point proprement une réfutation du livre des *Fonctions*. Son illustre et modeste auteur a moins cherché, en effet, dans ce livre, à faire prévaloir ses idées qu'à montrer simplement qu'à la métaphysique obscure, et souvent trompeuse, sur laquelle on avait établi jusqu'ici le calcul différentiel, il était possible de substituer des idées très-exactes et très-lumineuses, et j'ai peine à croire que l'on puisse jamais parvenir à nous prouver qu'il n'y a pas complètement réussi.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème de probabilité proposé à la page 324 du second volume des Annales;

Par MM. TÉDENAT, correspondant de la première classe de l'Institut, recteur de l'académie de Nismes; D. ENCONTRE, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Montpellier; LHUILIER, professeur de mathématiques

à l'académie impériale de Genève ; LE GRAND et ROCHAT, professeurs de mathématiques à Saint-Brieux.

ÉNONCÉ. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3,...m, *dont il en sort* n *à chaque tirage ; quelle est la probabilité que, parmi les* n *numéros d'un même tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle ?*

Je vais rendre un compte sommaire des diverses solutions qui ont été données de ce problème, en insistant principalement sur les différences essentielles qu'elles pourront offrir.

Je commencerai par la démonstration d'un principe sur lequel reposent toutes ces solutions. Ce principe est généralement connu ; mais, la démonstration qu'en ont fourni MM. Le Grand et Rochat étant très-courte, on me pardonnera de la rapporter ici.

Soient

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + m,$$
$$S_2 = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + m(m+1),$$
$$S_3 = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + m(m+1)(m+2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S_p = 1.2.3\ldots p + 2.3.4\ldots(p+1) + 3.4.5\ldots(p+2) + \ldots + m(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1).$$

Il s'agit de prouver qu'on doit avoir

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\, m(m+1),$$
$$S_2 = \tfrac{1}{3}\, m(m+1)(m+2),$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\, m(m+1)(m+2)(m+3);$$
$$S_p = \frac{1}{p+1} m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+p-1)(m+p).$$

Pour y parvenir, supposons que cette loi se soit vérifiée pour les $m-1$ premiers termes de la dernière suite, de manière qu'on ait

$$1.2.3\ldots p + 2.3.4\ldots(p+1) + 3.4.5\ldots(p+2) + \ldots + (m-1)(m)(m+1)\ldots(m+p-2)$$
$$= \frac{1}{p+1}(m-1)(m)(m+1)\ldots\ldots(m+p-2)(m+p-1);$$

on aura alors

$$S_p=\frac{1}{p+1}(m-1)(m)(m+1)..(m+p-2)(m+p-1)+m(m+1)(m+2)....(m+p-1),$$

ou $S_p=\dfrac{1}{p+1}m(m+1)(m+2)....(m+p-1)\{(m-1)+(p+1)\}$,

ou $S_p=\dfrac{1}{p+1}m(m+1)(m+2)....(m+p-1)(m+p)$.

Il est donc prouvé par là que cette formule serait vraie pour les m premiers termes de la suite, si elle était vraie pour ses $m-1$ premiers termes; or, il est aisé de se convaincre qu'elle est vraie pour les deux premiers; car on a

$$1.2.3....p+2.3.4....p+1=2.3.4....p[1+(p+1)]$$
$$=\frac{1}{p+1}2.3.4....p(p+1)(p+2)\;;$$

ainsi l'expression de S_p est exacte, et il en doit être de même de celles de S_1, S_2, S_3,.... qui n'en sont que des cas particuliers.

Il résulte aussi de là qu'on doit avoir

$$\frac{m-2}{1}+\frac{m-3}{1}+\frac{m-4}{1}+...+3+2+1=\frac{m-1}{1}.\frac{m-2}{2},$$

$$\frac{m-3}{1}.\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}.\frac{m-5}{2}+...+6+3+1=\frac{m-1}{1}.\frac{m-3}{2}.\frac{m-4}{3},$$

$$\frac{m-4}{1}.\frac{m-5}{2}.\frac{m-6}{3}+\frac{m-5}{1}.\frac{m-6}{2}.\frac{m-7}{3}+...+10+4+1=\frac{m-3}{1}.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}.\frac{m-6}{4},$$

....

Je passe présentement à la question proposée. Comme il est connu que, lorsqu'un événement dépend de quelques chances, comprises parmi plusieurs autres, toutes également possibles, la probabilité de cet événement est exprimée par une fraction dont le numérateur est le nombre des chances de l'arrivée desquelles cet événement dépend, et dont le dénominateur est le nombre total des chances; et comme, d'un autre côté, on sait de combien de manières n numéros peuvent être choisis entre m; on voit que la question se réduit à déterminer

de combien de manières les m nombres $1.2.3\ldots.m$ peuvent être pris n à n sans que, dans aucune combinaison, il se trouve deux ou un plus grand nombre de numéros consécutifs.

On peut chercher directement le nombre des combinaisons de cette sorte; ou bien on peut, au contraire, chercher le nombre de celles qui renferment des numéros consécutifs; puisque ce dernier nombre, retranché du nombre total des combinaisons n à n, donnera pour reste le nombre des combinaisons dont il est question dans l'énoncé du problème. C'est ce dernier parti qu'a pris M. Lhuilier. Pour abréger le discours, il appelle *Ambe successif* l'assemblage de deux numéros se succédant consécutivement dans la suite des nombres naturels; soit que ces numéros soient seuls, soit qu'ils fassent partie d'une combinaison d'un plus grand nombre de numéros. Cette définition posée, M. Lhuilier parvient à la formule générale par la considération des cas particuliers, en procédant à peu près comme il suit.

1.° Dans le cas de $n=1$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs est évidemment $0=\frac{m}{1}-\frac{m}{1}$.

2.° Dans le cas de $n=2$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs est évidemment

$$\frac{m-1}{1}=\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}-\frac{m-1}{1}.\frac{m-2}{2}.$$

3.° Dans le cas de $n=3$; si 1 et 2 font tous deux parties d'un tirage, on pourra leur adjoindre l'un quelconque des $m-2$ numéros restans; si, au contraire, 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver, il faudra lui adjoindre toutes les combinaisons deux à deux des $m-2$ numéros restans qui peuvent fournir des ambes consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède, $m-3$.

Ainsi le nombre des tirages ayant 1 pour leur plus petit numéro, et présentant des ambes successifs, sera $(m-2)+(m-3)$; pareillement le nombre de ceux d'entre eux qui auront 2 pour leur plus petit numéro, sera $(m-3)+(m-4)$; le nombre de ceux qui auront 3

pour leur plus petit numéro, sera $(m-4)+(m-5)$, et ainsi de suite.

On voit, d'après cela, que le nombre total des tirages de trois numéros présentant des ambes successifs, sera

$$\{(m-2)+(m-3)\}+\{(m-3)+(m-4)\}+\{(m-4)+(m-5)\}+\ldots+\{1+0\}$$
$$=\{(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots+1\}+\{(m-3)+(m-4)+(m-5)+\ldots+1\}$$
$$=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}-\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

4.° Dans le cas de $n=4$; 1 et 2 devant faire à la fois partie d'un même tirage, on pourra leur adjoindre chacune des $\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}$ combinaisons deux à deux fournies par les $m-2$ numéros restans. Si au contraire 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver; il faudra adjoindre à ce numéro 1 toutes celles des combinaisons trois à trois des $m-2$ numéros restans qui présenteront des ambes successifs et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$.

Ainsi le nombre des tirages de quatre numéros qui, présentant des ambes successifs, auront 1 pour leur plus petit numéro, sera $\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$; le nombre des tirages de cette sorte qui auront 2 pour leur plus petit numéro, devra donc être $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$; le nombre de ceux qui auront 3 pour leur plus petit numéro, sera semblablement $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}$, et ainsi de suite.

On voit, d'après cela, que le nombre total des tirages de quatre numéros présentant des ambes successifs, sera

$$\left\{\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\right\}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\{\ 6\ +\ 3\ +\ 1\ \}$$
$$+\{\ 3\ +\ 1\ +\ 0\ \}$$
$$+\{\ 1\ +\ 0\ +\ 0\ \}$$
$$=\left\{\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$+\left\{\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\ldots+6+3+1\right\}$$
$$=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}-\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

M. Lhuilier applique encore ce raisonnement au cas où $n=5$ et, à raison de la marche uniforme du procédé, il est conduit à considérer le nombre des tirages de n numéros qui présentent des ambes consécutifs comme étant la différence entre le $(m-n+1)^{me}$ et le $(m-2n+2)^{me}$ nombres figurés du n^{me} ordre. Or, comme le premier de ces deux nombres figurés exprime le nombre total des tirages de n numéros, il en résulte que le dernier représente le nombre de ceux d'entre eux qui n'ont point d'ambes successifs.

M. Lhuilier observe, au surplus, que l'on pourrait s'assurer d'une manière rigoureuse de l'exactitude de ce résultat, par le raisonnement connu qui consiste à prouver que, si ce résultat est exact, pour des tirages de $n-1$ numéros, il doit l'être aussi pour des tirages de n numéros.

MM. Tédenat, Encontre, le Grand et Rochat ont au contraire cherché à calculer directement le nombre des chances favorables. Pour parvenir à leur but, ils supposent qu'on a fait des chances de cette sorte divers groupes, en plaçant dans le premier groupe toutes

toutes celles dont le plus petit numéro est 1, dans le second toutes celles dont le plus petit numéro est 2, dans le troisième toutes celles dont le plus petit numéro est 3, et ainsi de suite. Les choses ainsi entendues, voici comment ils procèdent.

1.° Il est d'abord évident que, s'il ne doit sortir qu'un seul numéro à chaque tirage, le nombre des chances favorables sera le nombre total des chances, c'est-à-dire, m ou $\frac{m}{1}$.

2.° S'il doit sortir deux numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-2$ numéros $3, 4, 5, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-2$.

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-3$ numéros $4, 5, 6, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-3$.

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-4$ numéros $5, 6, 7, \ldots m$; le nombre de ces chances sera donc $m-4$.

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-2$, laquelle sera unique : attendu qu'elle ne pourra être complétée que par le seul numéro m.

Ainsi, dans le cas de $n=2$, le nombre total des chances favorables sera

$$(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots\ldots+2+1=\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-1}{2};$$

c'est-à-dire, le $(m-2)^{me}$ nombre triangulaire.

3.° S'il doit sortir trois numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-2$ numéros $3, 4, 5, \ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-2)-2}{1}\cdot\frac{(m-2)-1}{2} \text{ ou } \frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-3$ numéros 4, 5, 6, ... m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-3)-2}{1}\cdot\frac{(m-3)-1}{2} \text{ ou } \frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons deux à deux des $m-4$ numéros 5, 6, 7, ... m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-2}{1}\cdot\frac{(m-4)-1}{2} \text{ ou } \frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-4$, laquelle sera unique : attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les deux seuls numéros $m-2$ et m.

Ainsi, dans le cas de $n=3$, le nombre total des chances favorables est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\ldots+3+1=\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3};$$

c'est-à-dire, le $(m-4)^{me}$ nombre pyramidal.

4.° S'il doit sortir quatre numéros à chaque tirage ; celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois à trois des $m-2$ numéros 3, 4, 5, ... m qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-2)-4}{1}\cdot\frac{(m-2)-3}{2}\cdot\frac{(m-2)-2}{3} \text{ ou } \frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois

à trois des $m-3$ numéros $4, 5, 6, \ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-3)-4}{1}\cdot\frac{(m-3)-3}{2}\cdot\frac{(m-3)-2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons trois à trois des $m-4$ numéros $5, 6, 7, \ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-4}{1}\cdot\frac{(m-4)-3}{2}\cdot\frac{(m-4)-2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable ayant $m-6$ pour son plus petit numéro, laquelle sera unique; attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les trois seuls numéros $m-4$, $m-2$, m.

Ainsi, dans le cas de $n=4$, le nombre total des chances favorables est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\ldots+4+1$$
$$=\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4};$$

c'est-à-dire, le $(m-6)^{me}$ nombre figuré du 4.e ordre.

La marche parfaitement uniforme de ce procédé conduit à conclure, sans qu'il soit nécessaire de pousser l'induction plus avant, qu'en général, n désignant le nombre des numéros qui sortent à chaque tirage, le nombre des tirages différens qui ne présentent point de numéros consécutifs, est le $(m-2n+2)^{me}$ nombre figuré du n^{me} ordre; c'est-à-dire,

$$\frac{m-2n+2}{1}\cdot\frac{m-2n+3}{2}\cdot\frac{m-2n+4}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

ce qu'il serait d'ailleurs facile d'établir par un raisonnement rigoureux.

Si présentement on considère que le nombre total des tirages possibles de n numéros parmi m est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n},$$

on en conclura que la probabilité demandée par l'énoncé de la question est

$$\frac{m-2n+2}{m}\cdot\frac{m-2n+3}{m-1}\cdot\frac{m-2n+4}{m-2}\cdots\frac{m-n+1}{m-n+1}.$$

M. Encontre remarque que, si l'on avait égard à l'ordre de sortie des numéros, dans chaque tirage, le nombre des tirages dans lesquels il ne se trouverait pas deux numéros voisins dans la suite des nombres naturels, serait simplement

$$(m-2n+2)(m-2n+3)(m-2n+4)\ldots(m-n+1);$$

et comme alors le nombre total des tirages possibles serait

$$m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1);$$

il s'ensuit que la probabilité cherchée serait encore la même que dans le premier cas.

M. Tédenat observe que, lorsque $n=\frac{1}{2}(m+1)$, le nombre des tirages sans numéros consécutifs se réduit à l'unité, et qu'il devient nul, si l'on a $n>\frac{1}{2}(m+1)$.

On peut encore parvenir au but par une autre méthode qui peut paraître un peu moins simple que les précédentes, mais qui a sur elles l'avantage de résoudre, outre la question proposée, une autre question non moins intéressante, et qui a avec elle une très-grande analogie. Je vais l'exposer brièvement.

Pour être plus court et plus clair, j'adopterai les dénominations suivantes :

J'appellerai *Combinaison totalement continue*, toute combinaison dont les numéros, du plus petit au plus grand, se trouveront être

des nombres consécutifs de la suite naturelle. J'appellerai *Combinaison totalement discontinue*, toute combinaison dans laquelle il sera impossible de rencontrer deux nombres consécutifs de la même suite. Quant aux combinaisons formées en partie de nombres consécutifs et en partie de nombres non consécutifs, elles pourront être indifféremment appelées *Combinaisons partiellement continues* ou *Combinaisons partiellement discontinues*.

J'observe présentement que chacune de ces diverses sortes de combinaisons peut être considérée sous deux points de vue très-distincts. On peut supposer tous les numéros à combiner disposés les uns à côté des autres, du premier au dernier, suivant l'ordre de leur grandeur, sur une ligne droite, sur une branche de courbe ou sur une portion de polygone ; ou bien on peut les supposer rangés, suivant le même ordre, soit sur la circonférence d'un cercle, soit sur toute autre courbe fermée, soit enfin sur le périmètre d'un polygone ; et les deux numéros extrêmes qui, dans le premier cas, ne seront point consécutifs, devront être réputés tels dans le second. J'appellerai *Combinaisons rectilignes* les combinaisons faites avec les numéros disposés de la première de ces deux manières, et *Combinaisons circulaires* celles qui seront faites avec les numéros rangés conformément à la seconde hypothèse. Les unes et les autres pourront être d'ailleurs *totalement* ou *partiellement continues* ou *discontinues*.

Il est d'abord clair que m numéros, pris n à n, doivent fournir m combinaisons circulaires et $m-n+1$ combinaisons rectilignes totalement continues ; mais le nombre de leurs combinaisons, soit rectilignes soit circulaires, totalement discontinues, n'est point aussi facile à déterminer.

La question où l'on propose de déterminer combien m numéros, pris n à n, peuvent fournir de combinaisons circulaires totalement discontinues, revient à celle-ci : *Un polygone de* m *côtés étant donné, combien peut-on construire de polygones de* n *côtés dont tous les sommets soient des sommets du polygone donné sans qu'au-*

cun de leurs côtés soit côté de ce polygone ? Sur quoi il faut remarquer qu'ici toute diagonale isolée doit être considérée comme un polygone de deux côtés dont les côtés se confondent ; et que tout sommet doit être considéré comme un polygone d'un seul côté.

La question où l'on propose de déterminer combien m numéros, pris n à n, peuvent fournir de combinaisons rectilignes, totalement discontinues, revient à celle-ci : *Une portion de polygone de* m *sommets, ou de* m—1 *côtés, étant donnée ; combien peut-on construire de portions de polygones de* n *sommets, ou de* n—1 *côtés, dont les sommets soient tous des sommets de la portion de polygone donnée, sans qu'aucun de leurs côtés soient côtés de cette portion de polygone ?* C'est proprement là la question qui a été proposée.

Je vais mener de front ces deux questions ; mais je dois observer auparavant que, comme ici la disposition respective des numéros, dans chaque combinaison, n'est de nulle considération ; on peut supposer qu'ils sont rangés, dans toutes, par ordre de grandeur, et qu'ainsi les polygones et portions de polygone dont il s'agit d'assigner le nombre, doivent être convexes, si les polygones ou portions de polygones donnés sont supposés tels.

1.° Il est d'abord évident que le nombre des extraits, soit circulaires soit rectilignes, totalement discontinus, n'est autre que le nombre total des extraits, c'est-à-dire, $\frac{m}{1}$.

2.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un ambe circulaire totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche, on ne pourra lui adjoindre que les extraits rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est par ce qui précède, $\frac{m-3}{1}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des ambes qu'on aura formés sera $m.\frac{m-3}{1}$; mais, chaque ambe se trouvant ainsi répété deux fois, il s'ensuit que le

nombre des ambes circulaires, totalement discontinus que m numéros, peuvent fournir, est seulement

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{1}.$$

Pour passer de là aux ambes rectilignes, on remarquera que le seul de ces ambes qui ait été exclu du nombre de ceux qui viennent d'être formés, est celui qui résulte de l'assemblage des deux numéros extrêmes. Ainsi, le nombre des ambes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{2}\cdot\frac{m-3}{1}+1=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}.$$

3.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un terne circulaire, totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche ; on ne pourra lui adjoindre que les ambes rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{(m-3)-1}{1}\cdot\frac{(m-3)-2}{2}$ ou $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des ternes qu'on aura formés sera $m\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$; mais, chaque terne se trouvant ainsi évidemment répété trois fois, il s'ensuit que le nombre des ternes circulaires, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est seulement

$$\frac{m}{3}\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

Pour passer de là aux ternes rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des ternes circulaires dont les numéros extrêmes font partie, sans renfermer d'autres numéros consécutifs, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus; or,

ce nombre de ternes est évidemment égal au nombre des extraits rectilignes, totalement discontinus que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, par ce qui précède, $\frac{m-4}{1}$. Ainsi, le nombre des ternes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{3}\cdot\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-4}{1}=\frac{m^2-5m+6}{1.2}\cdot\frac{m-4}{3}=\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

4.° L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie d'un quaterne circulaire, totalement discontinu, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche; on ne pourra lui adjoindre que les ternes rectilignes, totalement discontinus, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre est, par ce qui précède, $\frac{(m-3)-2}{1}\cdot\frac{(m-3)-3}{2}\cdot\frac{(m-3)-4}{3}$ ou $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des quaternes qu'on aura formés sera $m\cdot\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$; mais, chaque quaterne se trouvant ainsi évidemment répété quatre fois, il s'ensuit que le nombre des quaternes circulaires, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est seulement

$$\frac{m}{4}\cdot\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}.$$

Pour passer de là aux quaternes rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des quaternes circulaires, dont les deux numéros extrêmes font partie, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus; or, ce nombre de quaternes est évidemment égal au nombre des ambes rectilignes, totalement discontinus, que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, par ce qui précède, $\frac{(m-4)-1}{1}\cdot\frac{(m-4)-2}{2}$ ou $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$. Ainsi, le nombre des

quaternes

quaternes rectilignes, totalement discontinus, que m numéros peuvent fournir est

$$\frac{m}{4}\cdot\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}=\frac{m^2-7m+12}{1.2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$=\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

Comme on aperçoit déjà facilement, sans pousser l'induction plus loin, la loi de ces divers résultats, je vais de suite en prouver l'exactitude, pour le cas général où les m numéros doivent être pris n à n.

Soient respectivement désignés par $C_{m,n}$ et $R_{m,n}$ le nombre des combinaisons circulaires et le nombre des combinaisons rectilignes, totalement discontinues que peuvent fournir m numéros, pris n à n.

L'adoption d'un numéro quelconque, pour faire partie de l'une des combinaisons circulaires, n à n, totalement discontinues, donnant l'exclusion à ses deux voisins, à droite et à gauche, on ne pourra lui adjoindre que les combinaisons rectilignes, $n-1$ à $n-1$, totalement discontinues, que pourront fournir les $m-3$ numéros restans, et dont le nombre devra être représenté par $R_{m-3,n-1}$. Si l'on en fait de même successivement, pour chacun des m numéros, le nombre des combinaisons n à n qu'on aura formées, sera $mR_{m-3,n-1}$; mais, chaque combinaison, n à n, se trouvant ainsi évidemment répétée n fois, il s'ensuit qu'on doit avoir seulement

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}R_{m-3,n-1}. \qquad \text{(I)}$$

Pour passer de là aux combinaisons rectilignes, il faudra joindre à ce résultat le nombre des combinaisons circulaires, n à n, dont les deux numéros extrêmes font parties, sans renfermer d'autres numéros consécutifs, et dont le second et le pénultième se trouvent conséquemment exclus; or, ce nombre de combinaisons est évidemment égal au nombre des combinaisons rectilignes, $n-2$

à $n-2$, totalement discontinues, que peuvent fournir les $m-4$ numéros restans, c'est-à-dire, $R_{m-4,n-2}$. On a donc d'après cela

$$R_{m,n}=C_{m,n}+R_{m-4,n-2}. \qquad \text{(II)}$$

Telles sont les équations générales de relation entre le nombre des combinaisons rectilignes et le nombre des combinaisons circulaires, et dont l'intégration résoudrait complètement les deux problèmes.

De ces deux équations on en peut facilement déduire deux autres dans lesquelles R et C soient séparés. Si, en effet, on élimine $C_{m,n}$ entre elles, on aura d'abord

$$R_{m,n}=\frac{m}{n}R_{m-3,n-1}+R_{m-4,n-2}. \qquad (r)$$

Si, ensuite, on change m et n respectivement en $m-4$ et $n-2$, dans la première, et en $m-3$ et $n-1$, dans la seconde, il viendra

$$(n-2)C_{m-4,n-2}=(m-4)R_{m-7,n-3},$$

$$C_{m-3,n-1}=R_{m-3,n-1}-R_{m-7,n-3};$$

d'où on conclura, par l'élimination de $R_{m-7,n-3}$ et la substitution de la valeur de $R_{m-3,n-1}$, donnée par l'équation (I)

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}C_{m-3,n-1}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n-2}{m-4}C_{m-4,n-2}. \qquad (c)$$

Si maintenant, en suivant l'analogie indiquée par les résultats précédemment obtenus, on pose

$$R_{m,n}=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\cdots\frac{m-2n+2}{n},$$

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n-1}{1}\cdot\frac{m-n-2}{2}\cdots\cdots\frac{m-2n+1}{n-1};$$

il sera facile de se convaincre que ces valeurs satisfont aux équations (r) et (c), et conséquemment aux équations (I) et (II), et qu'ainsi elles en sont les intégrales ; ce qui garantit l'exactitude de ces deux formules.

D'après l'inspection des mêmes formules, on voit aisément qu'on peut écrire

$$R_{m,n}=\frac{m-2n+2}{n}R_{m-1,n-1} \qquad (r')$$

$$C_{m,n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-2n+1}{m-1}C_{m-1,n-1} \qquad (c')$$

équations qui conséquemment peuvent remplacer, soit les équations (r) et (c), soit les équations (I) et (II).

Les valeurs successives de $C_{m,n}$ qui répondent à $n=1, 2, 3, \ldots n$, c'est-à-dire,

$$\frac{m}{1},\quad \frac{m}{1}\cdot\frac{m-3}{2},\quad \frac{m}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3},\quad \frac{m}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdots\cdots;$$

sont très-remarquables, parce qu'elles entrent, comme coefficiens, dans un grand nombre de développemens. Ce sont, en particulier, les coefficiens des termes du développement de $2\text{Cos}.mx$, ordonné suivant les puissances descendantes de $2\text{Cos}.x$. Ces sortes de nombres, qui se représentent fréquemment dans l'analise, reçoivent donc, par ce qui précède, une interprétation à la fois combinatoire et géométrique.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Statique.

I. Si l'on joint, par des droites, le milieu de chacune des diagonales d'un quadrilatère à un point de l'autre diagonale, qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités, que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité ; l'intersection de ces deux droites sera le centre de gravité de l'aire du quadrilatère

II. Soit déterminé, sur chacune des deux diagonales de la base d'une pyramide quadrangulaire, un point qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités, que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité.

Si, du point ainsi déterminé, sur chaque diagonale, on mène une droite au centre de gravité de l'aire du triangle qui, ayant pour base l'autre diagonale, a son sommet au sommet de la pyramide ; les deux droites ainsi menées se couperont en un point, et ce point sera le centre de gravité du volume de cette pyramide.

ANALISE APPLIQUÉE.

Essai d'application de l'analise algébrique au phénomène de la circulation du sang ;

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



1. Soumettre à l'analise littérale le mouvement du sang dans les vaisseaux du corps animal, c'est là un problème auquel, depuis plus d'un siècle, on paraît avoir renoncé. Les efforts de Borelli, Keil, Jurin, Sauvages, Bernoulli et autres hommes célèbres sont connus : leurs longues démonstrations, fondées sur une application vicieuse de principes qui pouvaient être justes en eux-mêmes, n'ont conduit à aucun résultat certain ; leurs ouvrages sont oubliés et le terme même d'*Iatromathématicien* est tombé en mépris. Au milieu de cette immense variété de forces qui agissent ensemble dans les corps vivans, tant animaux que végétaux, il existe pourtant quelques lois certaines qui permettent d'appliquer à la physiologie du corps animé, les principes généraux de l'équilibre et du mouvement ; c'est ce que je me propose d'assayer dans ce mémoire.

2. Imaginons une masse quelconque, lancée par une force de projection quelconque, et qui, après avoir éprouvé à chaque instant l'effet des forces accélératrices et retardatrices qui auront pu agir sur elle, ait acquis, au bout du temps t, la vitesse u. Désignant par P la somme des forces accélératrices, et par Q la somme des forces retardatrices, on aura $\mathrm{d}u=(P-Q)\mathrm{d}t$; équation qui ne repose sur

aucune hypothèse, et qui, par sa simplicité et sa généralité, est applicable à toutes les suppositions de mouvemens quelconques.

3. Elle nous présente les trois cas de $P=Q$, de $P>Q$ et de $P<Q$. Dans les deux derniers cas, le mouvement sera accéléré, ou bien il sera retardé, du moins pendant l'élément de temps dt. Dans le premier cas, la vitesse restera la même; et, si cette même égalité avait lieu dans tous les points du système, il en résulterait pour le corps un mouvement rigoureusement uniforme. On voit, de plus, que l'uniformité de mouvement ne peut avoir lieu, à moins qu'à tous les points du système, la somme des forces accélératrices et celle des forces retardatrices ne soient rigoureusement égales entre elles.

4. L'équation $du=(P-Q)dt$ est applicable au cas d'un fluide circulant dans un canal étroit; seulement alors il faudra entendre par u, non la vitesse actuelle du fluide, mais le produit de cette vitesse multipliée par la section du canal, lequel exprimera la quantité de fluide qui, pendant l'élément de temps, aura traversé cette section. Tant que, dans tous les points du système, on aura $P=Q$, le mouvement du fluide sera tel que, dans des temps égaux, il passera par chaque section du canal des quantités de fluide rigoureusement égales entre elles; condition qui ne saurait avoir lieu, à moins que, dans tous les points du système, il n'existe une égalité parfaite entre les forces accélératrices et les forces retardatrices qui agissent sur le fluide.

5. L'application de ces principes au mouvement du sang est facile. A chaque contraction, le cœur chasse d'un côté dans l'aorte, de l'autre dans le tronc des artères pulmonaires, une onde de sang, évaluée à deux onces, à peu près, mais dont la quantité est heureusement indifférente pour l'objet que nous nous proposons. Il communique à chacune des deux ondes un certain degré de vitesse, résultant des contractions partielles de ses fibres musculaires, et d'autant plus difficile à déterminer qu'il doit dépendre d'une infinité de circonstances qu'il serait assez téméraire de vouloir soumettre au

calcul. Il est indifférent encore que les degrés de vitesse, communiqués par les deux ventricules aux deux ondes de sang, soient égaux ou inégaux entre eux.

6. L'onde de sang lancé, dans l'aorte, y éprouve, dès son entrée, l'action des différentes forces retardatrices dont on peut voir le dénombrement dans les ouvrages de nos célèbres physiologistes, et dont l'effet va en augmentant depuis le tronc de l'aorte jusques au plus petits rameaux artériels, et augmente encore pendant le retour par le système veineux. On aura donc $du = -Qdt$; ce qui donne $u = Const. - \int Qdt$. Ainsi donc la vitesse du sang au bout du temps t sera égale à la vitesse initiale de l'onde, moins une certaine fonction du temps t, qui nécessairement va en augmentant. Il résulte de là qu'indépendamment des forces accélératrices, la vitesse initiale de l'onde ne saurait être conservée; que son mouvement, bien loin d'être uniforme, serait bientôt épuisé; et que, dans des intervalles de temps égaux, il ne pourrait jamais passer des quantités égales de fluide par une section donnée du système.

7. Cependant la condition d'un mouvement uniforme du sang est indispensable au maintien des forces qui, dans l'état d'une santé parfaite, peuvent seules présider à toute cette classe nombreuse de fonctions animales qui dépendent de sa circulation entièrement libre. Il est essentiel qu'à chaque battement du cœur, les deux oreillettes reçoivent des deux troncs veineux des quantités de sang rigoureusement égales à celles que les deux ventricules lancent dans les deux troncs artériels; il est essentiel, de plus, que cette égalité ait lieu pour chaque partie du corps en particulier; sans quoi la quantité de sang que cette partie doit contenir, dans l'état de santé, ne saurait rester la même. Galien, à qui la circulation du sang était inconnue, définissait fort bien l'inflammation par *sanguinis influxus copiosior quam pars postulat*, et il avait raison. Cet *influxus copiosior* est l'effet fort naturel d'un mouvement accéléré du sang, à son entrée dans la partie. Il peut y avoir de même un mouvement retardé; et, quoique Galien n'en parle pas aussi clairement, on voit qu'il doit

en résulter un état opposé au premier, et qui exigera, pour sa guérison, un traitement contraire.

8. L'équation différentielle du mouvement du sang, dans l'état de santé, sera donc $du=o$; ce qui revient à $P=Q$. l'existence de la force accélératrice P, et son égalité à la somme des forces retardatrices Q, est donc bien prouvée. Elle doit résider dans les vaisseaux eux-mêmes, et sur-tout dans les artères. Leur irritabilité n'est pas absolument démontrée; mais leurs dilatations et contractions tombent sous les sens, et on ne voudra pas les regarder comme les effets d'une simple élasticité. Dans ce cas, la systole, égale tout au plus à la diastole, ferait regagner à l'onde le degré de vitesse que celle-ci lui aurait fait perdre; ce qui n'ajouterait rien à sa vitesse absolue. Je serais disposé à croire que, dans le battement des artères, la systole est plus forte que la diastole, et qu'en ceci consiste peut-être l'avantage que doit avoir sur la simple élasticité cette force vitale particulière qui anime les vaisseaux artériels. Dans tous les cas, nous désignerons par P cette force accélératrice, à l'endroit du système qui répond au temps t; nous aurons donc, pour condition indispensable du mouvement du sang, dans l'état de santé, $P=Q$; c'est-à-dire, que la force vitale des artères doit être partout égale à la somme des résistances.

9. Tant que cette équation de condition $du=o$ ou $P=Q$ sera maintenue, le sang coulera, dans le système des vaisseaux sanguins, comme s'il circulait dans le vide parfait; et la conservation rigoureuse de la vitesse primitive, imprimée par la contraction du cœur, permettra, jusqu'à un certain point, l'application de l'anàlise. Soient

A.... La masse entière du sang;
B.... La masse de l'onde que le ventricule gauche chasse dans l'aorte;
u..... La vitesse primitive que cette onde a reçue du cœur;
V.... Le volume entier ou la capacité du système;
n..... Le nombre des battemens, pendant le temps donné T.

10. La masse entière du sang sera donc partagée en un nombre

d'ondes égal à $\frac{A}{B}$. Le temps employé par chacune de ces ondes, pour parcourir tout le volume du système, sera égal à l'espace divisé par la vitesse, ou à $\frac{V}{u}$. La fraction $\frac{nV}{Tu}$ exprimera le nombre des battemens qui auront lieu dans le même temps. Ainsi donc, le mouvement du sang devant être regardé comme uniforme et continu dans l'état de santé, ce qui suppose nécessairement que le nombre des ondes est égal à celui des contractions du cœur qui ont lieu, pendant le temps que chaque onde emploie à achever entièrement sa circulation, on aura $\frac{nV}{Tu}=\frac{A}{B}$, ou $nBV=ATu$; équation générale et applicable non seulement à l'état de santé, mais à tout mouvement du sang, dès qu'on le suppose parvenu à l'état d'uniformité. La vitesse du sang sera donc proportionnelle *directement* à la fréquence du pouls, à la masse de l'onde et à la capacité du système, et *réciproquement* à la masse entière du sang.

11. Quoiqu'on ait raison de supposer que, dans l'état de santé, le système des vaisseaux sanguins est entièrement rempli, on aurait pourtant tort de regarder le volume du système comme égal à la masse du sang, ou de faire $A=V$, en prenant ici pour A, non la masse elle-même mais le volume qu'elle occupe. Il faut, en effet, que A soit moindre que V, sans quoi la circulation du sang deviendrait physiquement impossible. C'est à quoi la nature a pourvu, en donnant à nos vaisseaux l'extensibilité dont ils ont besoin, pour entretenir le mouvement. De la systole ils passent à la diastole, à l'arrivée de chaque nouvelle onde. Dans le premier de ces deux états, il sera permis de supposer $V=A$; mais, dans le second, on aura $V>A$; et l'excès de la fraction $\frac{V}{A}$ sur l'unité, ou $\frac{V}{A}-1$, sera ce que nous entendons par *grandeur* ou *quantité* du pouls. Or, en vertu de l'égalité $nBV=ATu$, on aura $\frac{V}{A}=\frac{Tu}{nB}$; ainsi, la grandeur du pouls sera proportionnelle à la vitesse du sang, divisée

par la fréquence du pouls, en supposant toutefois une valeur constante à B, masse de l'onde que le cœur chasse dans l'aorte, à chacune de ses contractions. Et effectivement, nous voyons que, dans le dernier stade des maladies aiguës, le pouls devient plus petit, à mesure qu'il devient plus fréquent. D'un autre côté, une augmentation dans la grandeur du pouls nous fait présumer, toutes choses étant égales d'ailleurs, une augmentation proportionnée dans la vitesse du sang.

12. De cette même égalité $nBV = ATu$, on tire immédiatement la conclusion $A = \frac{nBV}{Tu}$; c'est-à-dire, que la masse du sang ne saurait changer, à moins que quelques-unes des quantités n, B, V, u, ou toutes ensemble ne reçoivent un changement proportionné. A chaque arrivée d'une nouvelle quantité de suc alimentaire, fourni par les premières voies, la quantité que nous désignons par A sera augmentée; il en résultera que la fréquence du pouls, la masse de l'onde sanguine, et la capacité du système de nos vaisseaux sanguins seront aussi augmentés; mais la vitesse absolue du sang en sera diminuée. Ces trois conclusions sont assez bien prouvées par l'expérience. Il en résulte de plus qu'à chaque changement de la masse du sang, désignée par A, l'uniformité dans son mouvement doit être interrompue, jusqu'à ce que l'égalité entre les deux produits nBV et ATu soit rétablie de nouveau.

13. Cette même égalité fournit de plus $V = \frac{ATu}{nB}$; ce qui nous montre que la capacité des vaisseaux sanguins doit être considérée comme une quantité très-variable. La dilatation des canaux artériels et veineux est une suite naturelle de leur réplétion; leur abaissement est la conséquence de leur inanition. Dans ce cas, la capacité V du système peut être supposée proportionnelle à la masse A du sang : on aura donc $u = nB$; ainsi, la vitesse du sang sera proportionnelle à la fréquence du pouls et à la masse de l'onde.

14. Il est des cas pourtant où la capacité du système V est

diminuée, tandis que la masse entière A du sang reste la même. Cela arrive, par exemple, à la suite de chaque couche; cela a encore lieu immédiatement après l'amputation d'un membre de quelque conséquence. Alors, regardant A et B comme des quantités sensiblement constantes, on aura $V = \frac{Tu}{n}$. Ainsi donc, la capacité du système étant proportionnelle à la vitesse du sang divisée par la fréquence du pouls, l'effet doit être une augmentation dans la fréquence du pouls, et un ralentissement dans la vitesse du sang. Le premier de ces deux effets est suffisamment prouvé par l'expérience, et l'autre en est une conséquence nécessaire.

15. Jusqu'ici nous avons supposé $P=Q$ et $du=0$; ainsi le mouvement du sang était censé rigoureusement uniforme. Il cessera de l'être dès que cette égalité n'aura pas lieu; et l'on peut prévoir qu'il sera accéléré dans le cas de $P>Q$, et retardé dans le cas de $Q>P$. Il en résultera deux grandes classes de maladies parfaitement opposées; et l'on voit que le rapport de l'une à l'autre est celui du *plus* au *moins*, du *positif* au *négatif*.

16. Ce serait bien peu connaître les limites de nos facultés intellectuelles, aussi bien que celles des connaissances que l'observation est en état de nous fournir, que d'entreprendre à intégrer l'équation différentielle $du=(P-Q)dt$, tandis que les fonctions P et Q, aussi bien que la forme conjecturale qu'elles peuvent avoir, sont des quantités absolument inconnues pour nous. Tant qu'il sera permis de les supposer indépendantes du temps t, on aura, en intégrant $u=(P-Q)t+Const.$ Ainsi, l'accroissement ou le décroissement de la vitesse sera proportionnel au temps. Mais il est assez visible que ce rapport ne peut se maintenir que dans les premiers instans. Il cessera d'avoir lieu dès que les quantités P et Q, dont la première exprime la somme des forces accélératrices et l'autre celle des forces retardatrices, seront devenues fonctions du temps; et dès-lors il faudra renoncer à intégrer l'équation différentielle $du=(P-Q)dt$.

17. Examinons d'abord le cas de $P>Q$, ou de du *positif*. Le

mouvement du sang sera sensiblement *accéléré* ; et , sans vouloir soumettre à un calcul rigoureux la solution de l'équation $du=(P-Q)dt$, on voit pourtant que les conséquences de ce mouvement accéléré doivent être celles qui suivent : accumulation de la masse sanguine dans le système veineux, et par conséquent à la surface du corps; elle pénétrera avec force dans ces petits vaisseaux qui sont invisibles dans l'état naturel; de là ces yeux étincelans, ces battemens fréquens du cœur et des artères ; cette force et cette fréquence du pouls ; cette respiration embarrassée ; ces urines colorées, ces céphalagies ; cette foule de symptômes enfin dont l'ensemble constitue cette classe de mouvemens fébriles qui est connue sous le nom de *Pyrexies.*

18. L'autre cas de $P<Q$, ou de du négatif a pour suite un mouvement du sang *retardé.* L'onde de sang qui, à chaque battement, rentre dans le cœur, par le tronc du système veineux, est moindre alors que celle que le cœur chasse dans l'aorte. Le sang s'accumulera donc, dans le système artériel, en laissant entièrement vides les petits canaux du système veineux, et en se retirant en partie des grandes veines. L'évacuation du cœur, à chaque battement, ne sera qu'incomplette ; continuellement, mais faiblement irrité, il éprouvera des contractions petites, mais plus fréquentes que dans l'état naturel ; le resserrement et la contraction des vaisseaux veineux de la surface, leur disparition, la pâleur répandue sur tout le corps, la diminution de l'embonpoint, les yeux languissans; tels sont les symptômes que l'on doit regarder comme la suite naturelle de cet état où la somme des résistances est plus grande que celle des forces vitales des artères, et détermine, en conséquence, le refoulement de la masse sanguine vers l'intérieur du corps.

19. Et tels sont les deux genres opposés de maladies qui doivent nécessairement avoir lieu, dès que l'égalité entre la somme des forces vitales et celle des résistances n'est plus maintenue, ce qui rend impossible cette uniformité dans le mouvement du sang, qui est pourtant la condition indispensable à l'état de santé parfaite. Le mouvement alors sera *accéléré*, dans le cas de $P>Q$; *retardé*, dans

dans le cas de $P<Q$. L'un et l'autre des deux états opposés font naître les symptômes que de tous temps on a désignés par la dénomination générale de *fièvres*. Les deux classes opposées ont été parfaitement reconnues ; mais on ignorait la cause physique de cette différence, laquelle pourtant est géométriquement démontrée, et susceptible d'être énoncée par une équation différentielle fort simple.

20. Il est assez naturel de désigner les mouvemens fébriles de la première classe par la dénomination d'*état positif*, et ceux de la seconde par celle d'*état négatif* ; attendu que la différence de l'une à l'autre est effectivement celle du *plus* au *moins*, du *positif* au *négatif*. Les dénominations de *fièvre positive* et de *fièvre négative* seraient toutefois assez impropres. On se sert du mot *fièvre* pour désigner la maladie entière, dont chaque accès est souvent marqué par des symptômes qui annoncent alternativement l'un ou l'autre des deux états. C'est ainsi que chaque accès de la fièvre intermittente ordinaire commence toujours par le frisson, qui porte tous les caractères de ce que nous avons nommé *état négatif* ; il est suivi par la seconde période qui est celle de la chaleur, et dans laquelle on reconnaît le passage du *négatif* au *positif* ; vient enfin la crise de l'accès, qui rétablit tout dans l'état naturel d'égalité entre la force vitale des artères et la somme des résistances.

21. La fièvre n'est donc jamais une maladie du cœur lequel, uniquement destiné à donner à l'onde la première impulsion, ne peut prendre aucune part aux variations de vitesse qu'elle peut éprouver dans son cours. Elle ne dépend pas non plus de la vitesse absolue du sang, très-variable en elle-même, et affectée par les causes les plus légères. Un exercice quelconque du corps, plus long-temps soutenu que de coutume ; une passion un peu violente ; un excès quelconque commis dans l'usage des alimens, etc., provoquent une vitesse augmentée du sang, un pouls plus fréquent que de coutume, et un accroissement de chaleur ; mais personne ne sera tenté de désigner cet état par le nom de fièvre. Tant que subsistera l'égalité entre la somme des forces vitales et celle des résistances, le mou-

vement uniforme du sang sera maintenu par la simple cessation des causes accidentelles qui avaient provoqué un pareil état ; la répartition égale de la masse sanguine, dans les deux systèmes artériel et veineux, se rétablira d'elle-même, et tout rentrera dans l'état naturel.

22. L'état positif, indiqué par $P>Q$, peut avoir deux causes générales ; la force vitale des artères sera trop grande, ou bien la somme des résistances sera trop petite. La force vitale des artères tient au système nerveux ; des observations anatomiques nous donnent lieu de croire que le nerf intercostal, et ses ramifications, étendues dans toutes les parties du corps, sont destinés, par la nature ; à maintenir cette force. Une disposition vicieuse dans cette partie importante du système, peut augmenter cette même force au delà de la mesure naturelle ; elle peut aussi l'affaiblir au point qu'elle ne saurait plus balancer la somme des résistances. Indépendamment de la force vitale, une disposition vicieuse du sang peut exciter des mouvemens fébriles La masse sanguine est sujette à se coaguler ; et cette tendance continuelle doit être comptée parmi les principales résistances que le sang rencontre dans son cours. Bien loin de la regarder comme un défaut, nous la jugeons absolument nécessaire pour prévenir l'état de $P>Q$, et empecher ainsi que le mouvement du sang, d'uniforme qu'il devait être, ne devienne accéléré. L'observation a suffisamment prouvé qu'un sang chargé de particules bilieuses est très-disposé à produire des pyrexies ; tandis que la présence de la pituite, dans cette même masse, provoque l'état entièrement opposé. Il paraît donc que cette tendance naturelle au coagulum est diminuée par la première des deux causes, et augmentée par la seconde. De plus, nous aimons à reconnaître, dans la présence du calorique, une des grandes causes qui influent sur cette mobilité de la masse sanguine ; ces accès de fièvres inflammatoires, qui suivent depuis l'état de la transpiration supprimée, et le refoulement du calorique dans l'intérieur du corps, nous rendent cette assertion fort probable.

23. Au défaut d'intégrer l'équation $du=(P-Q)dt$, dans le cas

de $P>Q$, nous pouvons prévoir que cet état ne peut pas se soutenir long-temps. Le sang accumulé dans le système veineux, trouverait, en y entrant, une somme de résistances supérieures à ce que doit être Q dans l'état naturel ; ainsi, au bout de quelque temps, l'équilibre entre P et Q sera de lui-même rétabli ; mais l'une et l'autre quantités seront plus grandes que l'état de santé ne peut le comporter. Le mouvement de la masse sanguine sera revenu de lui-même à l'état d'uniformité ; mais la vitesse du sang sera augmentée au point où elle doit nécessairement troubler la marche de plusieurs fonctions naturelles ; la masse sera inégalement répartie entre les deux systèmes ; et, tant que l'équilibre de ces deux forces se maintiendra, on voit que l'égale répartition ne saurait se rétablir d'elle-même. Les symptômes de la pyrexie resteront ; seulement ils n'augmenteront plus. L'accès sera parvenu à son *maximum*. Alors doit approcher le moment décisif qui doit prononcer sur le sort du malade. Il survient quelques signes précurseurs du changement qui se prépare. Il doit, en effet, arriver de deux choses l'une, attendu que l'une des deux forces doit, à la fin, l'emporter sur l'autre. La marche des maladies nous fait voir, ou du moins elle rend très-probable que, pour arriver à une fin salutaire, il doit se faire un changement dans la mixtion même de la masse sanguine. C'est ce que les plus anciens maîtres de l'art ont désigné par le nom de *coction*, terminée par la *crise*. Elle s'annonce ordinairement par des frissons, et par plusieurs symptômes auxquels on reconnaît l'état négatif de la fièvre ; et cela doit être ainsi, attendu que, pour passer de l'état positif à celui de *zéro*, il faut bien que la nature prenne une marche rétrograde. La crise se termine par des évacuations appelées *critiques*, et qui donnent une preuve assez évidente du changement de mixtion qui s'opère dans la masse même du sang. Elle a visiblement pour son double but, d'opérer une répartition égale de la masse sanguine dans tous les vaisseaux du corps, et de rétablir l'équilibre, indispensable dans l'état de santé, entre la force vitale des artères et la somme des résistances.

24. La progression, très-sensiblement arithmétique, que les jours critiques forment entre eux a été, dans tous les temps, un grand problème à résoudre parmi les maîtres de l'art. L'intégration de l'équation $du=(P-Q)dt$, si elle était possible, éclaircirait sans doute ce mystère. Peut-être l'équation intégrale se trouverait du nombre de celles dont les racines procèdent dans une progression arithmétique; et, si cette conjecture était fondée, elle servirait au moins à répandre un peu de jour sur une des opérations de la nature qui, en s'écartant de la marche ordinaire dans l'état de santé, paraissent d'autant moins susceptibles d'être représentées par des signes et des expressions algébriques.

25. Mais, pour que cette crise soit heureuse, il faut que cette force P se maintienne, et qu'elle continue à balancer la somme des résistances Q, augmentées par l'entrée du sang dans les petits vaisseaux artériels et veineux. Cela n'arrive pas toujours; il est assez fréquent, au contraire, dans le cas sur-tout où le malade est dépourvu des secours de l'art, que la force vitale des artères succombe à la somme des résistances. Alors l'expression $P-Q$ deviendra *négative;* le mouvement du sang, d'accéléré qu'il était, deviendra retardé; et, par une suite de changemens faciles à concevoir, d'après les principes qui viennent d'être exposés, la fièvre, *positive* jusqu'alors, deviendra *négative.* C'est ainsi que se produit ce que les maîtres de l'art ont désigné par le nom de *mauvaises crises*; elles se reconnaissent à la marche de la maladie, à la constitution connue du malade et à la constitution épidémique; mais sur-tout à ce que les signes diagnostics de la fièvre négative, précurseurs de la crise, se soutiennent trop long-temps, et que les forces du malade ne se rétablissent pas.

26. La fièvre négative qui succède ainsi à la fièvre positive, est bien plus dangereuse qu'elle ne l'aurait été si elle s'était présentée dès le commencement. Considérant, en effet, que le sang alors est engagé dans tout l'ensemble des petits vaisseaux du corps, et qu'il n'est plus soutenu par la force vitale des vaisseaux, nous devons

concevoir que son mouvement se ralentira, qu'à la longue il s'arrêtera tout-à-fait, et qu'ainsi la maladie se terminera par une inaction générale et une immobilité absolue de la masse sanguine. Tant que la marche de la fièvre était *positive*, on a dû facilement concevoir l'idée d'un *maximum* : ce *maximum* aurait dû avoir lieu lorsque, par l'entrée même du sang dans les petits vaisseaux, la somme des résistances serait redevenue égale à la somme des forces vitales des artères. Mais un pareil terme est contraire à l'idée d'une fièvre qui, de *positive* qu'elle avait été, est devenue *négative*. La force vitale des artères ayant succombé une fois à la somme des résistances, ne pourra lui redevenir égale, qu'autant qu'elle sera soutenue par des secours extraordinaires, et indépendans de la marche naturelle de la maladie, abandonnée à elle-même.

27. Dans les accès de fièvres intermittentes, qui tous commencent pas cet effet négatif, indiqué par $P<Q$, la nature emploie un moyen bien simple pour opérer la répartition égale de la masse sanguine, et pour rendre de nouveau la force vitale des artères égale à la somme des résistances : c'est l'intensité avec laquelle opèrent alors toutes les forces musculaires pour pousser la masse sanguine, accumulée dans le système artériel, pour opérer son passage dans le système veineux, et en effectuer ainsi la répartition égale entre les deux systèmes. Il en résulte une nouvelle force accélératrice, laquelle, ajoutée à celle des artères, la rend égale à la somme des résistances. Mais au *maximum* des fièvres inflammatoires, on ne peut guères compter sur un accroissement d'intensité des forces animales, affaiblies par la durée même de la maladie : elles sont réputées nulles alors ; le rétablissement de l'équilibre, entre les forces accélératrices et les forces retardatrices de la circulation, ne peut plus être exigé de la nature, abandonnée à elle-même ; elle a un besoin indispensable du secours de l'art.

28. Ce que nous avons dit jusqu'ici sur les deux forces désignées par P et Q, regardait la circulation du sang, considérée dans son entier depuis sa sortie du ventricule gauche, dans le tronc de l'aorte,

jusqu'à son entrée de la veine cave dans l'oreillette droite. Mais, l'équation $du=(P-Q)dt$ doit encore avoir lieu, pour chaque partie du corps en particulier, indépendamment du système entier. Dès-qu'elle n'est plus maintenue, il en résulte des affections locales dans le commencement, mais plus ou moins graves, suivant l'importance de la partie affectée, et qui doivent nécessairement provoquer, dans tout le système des vaisseaux sanguins, d'une manière plus ou moins sensible, l'un des deux états désignés par les notations $P>Q$ et $P<Q$, et par les dénominations correspondantes de *fièvre positive* et de *fièvre négative*.

29. La condition d'un mouvement uniforme, dans chaque partie du corps, est encore fondée sur l'équation $du=0$ ou $P=Q$. Elle cessera d'avoir lieu, lorsque les quantités P et Q ne seront plus égales entre elles. Dans le cas de $P>Q$, la différentielle du deviendra *positive*; le mouvement du sang sera accéléré, durant son passage, par les vaisseaux de cette partie; il s'accumulera donc dans les veines; il entrera, avec plus ou moins de force, dans les petits vaisseaux veineux qui, dans l'état naturel, restent invisibles à l'œil; il donnera un nouveau degré de vitesse à toute cette masse de sang qui le précède; il en résultera, pour tout l'ensemble du système, ce que nous avons nommé *fièvre positive*; et la partie, elle-même, sera affectée d'une *inflammation locale*. On voit que cette différence $P-Q$ peut fort bien aller jusqu'à détruire insensiblement la structure même des vaisseaux de la partie, à provoquer les phénomènes qui annoncent la coction de cette masse, et enfin à établir la suppuration.

30. Dans le cas opposé de $P<Q$, la différentielle du deviendra négative; le mouvement du sang sera retardé dans la partie; le sang commencera à se ralentir, sur-tout dans les vaisseaux artériels, tandis qu'il abandonnera, peu à peu, les petits canaux veineux; le sang dont ils seront remplis opposera une certaine résistance à la masse sanguine qui, amenée par les artères, devrait entrer dans les vaisseaux de cette partie, et passer de là dans le système veineux

sans rencontrer de résistance ; et ainsi se produira cet état, opposé au précédent, que nous avons désigné par la dénomination de *fièvre négative*. L'affection locale de la partie prendra alors le nom de *gangrène*. La fièvre qui accompagne cet état, et dont la marche, parfaitement opposée à celle de la fièvre inflammatoire, a été fort bien connue par les anciens, prend alors le nom de *typhus*, tandis que l'autre était appelée par eux *synothus*.

31. L'inflammation locale passe à l'état de gangrène, dès que la masse sanguine a assez pénétré dans les petits vaisseaux pour que la somme Q des résistances l'emporte enfin sur la force vitale P, et que cette dernière finisse par succomber à l'autre. L'état de $Q>P$ succède alors à celui de $P>Q$; et les symptômes qui annoncent l'un de ces deux états sont remplacés, et souvent en très-peu de temps, par ceux qui annoncent l'autre.

32. Il est très-possible, au reste, que l'inflammation topique soit accompagnée de tous les signes de la *fièvre négative* ; et que, d'un autre côté, la *fièvre positive* soit unie à l'état gangreneux d'une partie déterminée du corps. Les forces que nous avons désignées par P et Q, sont les sommes de toutes les forces partielles, propres à chaque partie du corps ; en sorte qu'en désignant ces dernières par p, q, p', q', p'', q'', ..., on aura $P=p+p'+p''+\ldots\ldots$, $Q=q+q'+q''+\ldots\ldots$ Or, il est possible qu'on ait, en même temps $P>Q$ et $p<q$, ce qui exigera que quelques-unes des quantités p', p'', p''', ..., soient plus grandes que leurs correspondantes q', q'', q''', ...; ou bien il est possible qu'on ait à la fois $P<Q$ et $p>q$, auquel cas quelques-unes des quantités p', p'', p''', ..., devront, au contraire, être plus petites que leurs correspondantes q', q'', q''', ... Dans ce dernier cas, l'état de la fièvre sera négatif, malgré l'inflammation locale dont certaine partie du corps se trouvera affectée ; dans le premier, au contraire, la maladie aura tout le caractère d'une fièvre positive, bien que quelque partie du corps soit affectée de gangrène.

33. La fièvre négative, accompagnée d'inflammation locale dans

quelques parties du corps, nous fera donc présumer, avec certitude, qu'une autre partie, externe ou interne, sera affectée de gangrène. Réciproquement, la fièvre positive, jointe à l'état gangreneux d'un ou de plusieurs endroits, nous fera juger, avec le même degré de certitude, que, dans d'autres endroits, il doit y avoir des inflammations locales et partielles. L'observation des fièvres exanthématiques confirme chaque jour la vérité et l'application pratique de ces corollaires. Ayant reconnu une fois l'état positif ou négatif de la fièvre, on pourra faire une pergnose certaine sur la fin qu'elle doit avoir; et réciproquement, en comparant la totalité des inflammations locales avec celle des endroits déjà tombés en gangrène, on sera en état de prononcer avec certitude sur celle des deux forces P et Q qui doit enfin l'emporter sur l'autre.

34. La péripneumonie, ou l'inflammation locale de la substance des poumons, forme une classe à part, par plusieurs des symptômes qui l'accompagnent. Ici, il faut appliquer l'équation $du=(P-Q)dt$ au *circulus minor*, ou au passage du sang par les viscères de la poitrine; P désignera la force vitale des vaisseaux de ces parties; Q exprimera la somme des résistances que le sang peut y rencontrer.

35. Il y aura inflammation de la substance des poumons, dans le cas de $P>Q$; la masse sanguine sera accumulée dans les vaisseaux veineux de ces viscères; elle communiquera son mouvement accéléré à celle qui la précède immédiatement, et qui sera portée dans le ventricule gauche du cœur et dans le tronc de l'aorte, auquel il communique. Il y aura accumulation de la masse sanguine dans le système artériel; elle paraîtra refoulée vers l'intérieur du corps, quoiqu'on ait effectivement alors $P>Q$, et que la marche de la fièvre soit évidemment positive. Il est très-ordinaire, en effet, que la péripneumonie, au plus haut de son état inflammatoire, paraisse sous les apparences d'une fièvre négative, et on en voit la raison dans la simple application des principes généraux que nous venons de poser. Dans l'état opposé de $P<Q$, le sang sera accumulé dans les canaux artériels de ce viscère; les ondes amenées successivement

successivement par le tronc de la veine cave, y trouveront une résistance supérieure à celle qui aurait lieu dans l'état naturel; le sang sera donc accumulé dans le système veineux, et conséquemment la maladie, quoiqu'on ait $P<Q$, présentera l'apparence trompeuse d'une fièvre positive et inflammatoire; mais la force vitale des vaisseaux n'en sera pas moins inferieure à la somme des résistances. La difficulté d'établir, dans les inflammations des poumons, un pronostic certain, en suivant les règles ordinaires que prescrit la séméïotique dans tous les autres cas, et l'exception formelle que présentent, à cet égard, les affections inflammatoires du système pulmonaire, ont été reconnues, de tout temps, par les véritables maîtres de l'art. Le système, très-simple, que nous venons d'établir en rend suffisamment raison.

36. En conséquence des théorèmes que nous venons d'avancer, on peut donc regarder comme prouvé que la cause prochaine de toutes les affections morbifiques, tant générales que topiques, qui sont connues sous le nom de *pyrexies*, réside dans le défaut d'égalité parfaite entre la somme P des forces vitales des vaisseaux et la somme des résistances désignée par Q. Désignant par u la vitesse de l'onde, prise dans le sens que nous lui avons donné au n.° 4, la condition nécessaire à l'état de santé sera $du=0$, ou $P=Q$; et le grand problème de soumettre la marche entière de toute cette classe nombreuse de maladies au régime de l'analise, et de lui donner le caractère de la certitude et de l'évidence mathématique, se réduit à l'intégration de l'équation $du=(P-Q)dt$; intégration que nous reconnaissons être infiniment au-dessus de nos forces actuelles, et que nous nous bornons conséquemment à recommander aux Médecins-Géomètres des siècles à venir.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial,

Au Rédacteur des *Annales;*

En réponse aux observations contenues dans la lettre de M. Bret, insérée à la page 31 de ce volume.



Monsieur et cher Confrère,

Il n'était pas, ce me semble, nécessaire d'établir, *à priori*, les deux propositions mentionnées par M. Bret, pour démontrer le principe qui sert de fondement à la théorie des équations, puisqu'il s'agissait seulement de prouver, comme je l'ai fait complètement, qu'il existe au moins une quantité α (et non plusieurs quantités α, α', α'',....) qui, substituée à la place de x, dans le polynome $Ax^n+Bx^{n-1}+....+Q$, le fait évanouir.

Mais, indépendamment du principe que j'ai démontré à la page 338 du second volume des *Annales*, rien n'empêche que, conformément au désir qu'en témoigne M. Bret, je ne démontre que, dans les équations

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \varphi\,(A, B, \ldots.\beta)\,, \\ \alpha' = \varphi'\,(A, B, \ldots.\beta')\,, \\ \alpha'' = \varphi''(A, B, \ldots.\beta'')\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\}(a)$$

les fonctions indiquées par φ, φ', φ'', ... sont les mêmes ; ce qui, ce me semble, peut se faire, assez simplement, de la manière suivante.

En mettant successivement α et β, α' et β', α'' et β'', ..., à la place de x et y, dans l'équation

$$y = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots.. ;$$

il vient

$$\left.\begin{array}{l} \beta\ = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots.\,, \\ \beta' = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots.\,, \\ \beta'' = A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + \ldots.\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\}(b)$$

Or, puisqu'il faut faire les mêmes opérations sur α, α', α'', ..., pour obtenir les valeurs respectives de β, β', β'', ..., et que les coefficiens A, B, ... sont combinés d'une même manière dans toutes ces équations avec α, α', α'', ..., il est clair que, si l'on met la première des équations (b) sous la forme

$$\beta = F(A, B, \ldots.\alpha)\,,$$

on pourra mettre les suivantes sous les formes respectives

$$\begin{array}{l} \beta' = F(A, B, \ldots.\alpha')\,, \\ \beta'' = F(A, B, \ldots.\alpha'')\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array}$$

et, à cause des équations (a), on pourra ensuite écrire

$$\left.\begin{array}{l} \beta\; =F[A, B, \ldots.\varphi\; (A, B, \ldots \beta\;)]\;, \\ \beta' =F[A, B, \ldots.\varphi' (A, B, \ldots \beta')]\;, \\ \beta''=F[A, B, \ldots.\varphi''(A, B, \ldots \beta'')]\;, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;, \end{array}\right\} (c)$$

mais, si l'on fait $\beta=\beta'=\beta''=\ldots\ldots$, ce qui ne saurait altérer l'égalité entre les membres des équations (c) (*), les premiers membres de ces équations devenant identiques, les seconds le deviendront aussi; on aura donc

$$F[A,B,\ldots.\varphi(A,B,\ldots.\beta)]=F[A,B,\ldots.\varphi'(A,B,\ldots.\beta)]=F[A,B,\ldots.\varphi''(A,B,\ldots.\beta)]=\ldots.\;;$$

or, puisque les fonctions indiquées par φ', φ'',.... ne changent pas, par les substitutions respectives de β à la place de β', β'',..., et que, de plus, tous les membres de la suite d'égalités précédente sont des mêmes fonctions, indiquées par le caractère commun F, il s'ensuit évidemment que ces égalités ne peuvent avoir lieu qu'autant qu'on a simultanément

$$\varphi(A, B, \ldots.\beta)=\varphi'(A, B, \ldots.\beta)=\varphi''(A, B, \ldots.\beta)=\ldots.\;;$$

car, s'il en était autrement, il s'ensuivrait que les mêmes combinaisons de quantités différentes $\varphi(A, B, \ldots.\beta)$, $\varphi'(A, B, \ldots.\beta)$, $\varphi''(A, B, \ldots.\beta)$,.... avec les mêmes quantités A, B,.... seraient égales, ce qui est absurde: donc les fonctions φ, φ', φ'',.... sont les mêmes.

(*) En effet, l'équation $\beta'=F[A,B,\ldots\varphi'(A,B,\ldots\beta')]\ldots(d)$ ou $\beta'=F(A,B,\ldots.\alpha')$, prise pour exemple n'étant qu'une autre manière d'écrire l'équation $\beta'=A\alpha'^n+B\alpha'^{n-1}+\ldots(e)$; il est clair que la substitution du symbole β, à la place du symbole β', dans l'équation (d), équivaut à la substitution de α et β, à la place de α' et β' dans l'équation (e); substitution permise d'après l'hypothèse.

Quant au second principe que M. Bret trouve que mon raisonnement n'est pas établi, il est encore plus étranger à la démonstration en question que le précédent, et je dois d'autant moins m'arrêter à le démontrer, qu'il l'est déjà, de la manière la plus simple et la plus claire, dans tous les ouvrages élémentaires de mathématiques qui traitent des problèmes indéterminés et de l'interpolation.

Agréez, etc.

Paris, le 6 juillet 1812.

Lettre de M. Bérard, *principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon.*

Au Rédacteur des *Annales.*

Monsieur,

Monsieur Bret a donné, à la page 223 du 2.me volume des *Annales* (janvier 1812), pour construire l'équation à la parabole, une méthode qui, à la rédaction près, est exactement celle que l'on trouve à la page 75 de mes *Opuscules mathématiques*, publiées en 1810 (*); méthode que je lui avais communiquée dès le mois d'août 1808.

L'honnêteté et la délicatesse de M. Bret, la réputation méritée dont il jouit comme géomètre, et le peu d'importance de l'objet; tout

(*) Un volume in-8.°, chez *Louis*, libraire, rue de Savoie, n.° 6, à Paris.

m'assure qu'ayant perdu de vue la communication que je lui en avais faite, il n'a publié cette méthode sous son nom, que parce qu'il a cru, en effet, ne la devoir qu'à ses propres réflexions ; et, si maintenant je me permets de réclamer, c'est uniquement afin qu'on ne croie pas que j'ai voulu moi-même dérober quelque chose à M. Bret.

Agréez, etc.

Briançon, le 7 juillet 1812.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'arithmétique proposé à la page 356 *du deuxième volume des* Annales ;

Par MM. Le Grand et Rochat, professeurs de mathématiques à St-Brieux, et Dubain, élève du lycée d'Angers.



Enoncé. Deux suites, composées chacune de n *nombres positifs et inégaux, étant données ; comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des produits des termes de la première par les termes correspondans de la seconde, soit la plus grande ou la plus petite possible ?*

Comment faut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites, pour que la somme des quotiens des termes de la première par leurs correspondans dans la seconde, soit la plus grande ou la plus petite possible ?

Les solutions de ce problème, fournies par MM. Le Grand, Rochat et Dubain, étant les mêmes, quant au fond, et ne présentant que quelques légères différences de rédaction, il va en être rendu compte dans un même article.

Soient $A_1, A_2, A_3, \ldots. A_g, \ldots. A_h, \ldots. A_n$ les nombres de la première suite, rangés par ordre de grandeur, du plus grand au plus petit; et supposons que ceux de la seconde, rangés comme ils doivent l'être, pour donner lieu au $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$, soient $B_1, B_2, B_3, \ldots. B_g, \ldots. B_h, \ldots. B_n$.

I.er CAS. Pour la somme des produits.

Puisque

$$A_1B_1+A_2B_2+\ldots.+A_gB_g+\ldots.+A_hB_h+\ldots.+A_nB_n=P\ ,$$

est un $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$, il faut que, les nombres de la première suite conservant toujours le même ordre, la permutation entre eux de deux quelconques des termes de la seconde suite donne un résultat $\left\{\begin{matrix}\text{moindre}\\ \text{plus grand}\end{matrix}\right\}$ que le précédent; c'est-à-dire, qu'en écrivant

$$A_1B_1+A_2B_2+\ldots.+A_gB_h+\ldots.+A_hB_g+\ldots.A_nB_n=Q\ ,$$

on doit avoir

$$Q \lesseqgtr P$$

ou, en substituant, et supprimant, de part et d'autre, les termes communs,

$$A_gB_h+A_hB_g \lesseqgtr A_gB_g+A_hB_h\ ,$$

ou, en transposant et décomposant,

$$(A_g-A_h)(B_h-B_g) \lessgtr 0\ ,$$

ou, parce que, par l'hypothèse, A_g-A_h est positif,

$$B_h-B_g \lessgtr 0 \quad \text{ou} \quad B_h \lessgtr B_g\ .$$

Ainsi les termes de la première suite allant en décroissant, du premier au dernier, il faut pour le $\begin{Bmatrix} maximum \\ minimum \end{Bmatrix}$ que les termes de la seconde aillent en $\begin{Bmatrix} \text{décroissant} \\ \text{croissant} \end{Bmatrix}$, du premier au dernier.

II.me CAS. Pour la somme des quotiens.

Tout étant d'ailleurs comme dans le cas précédent, soit posé

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\ldots\ldots+\frac{A_g}{B_g}+\ldots\ldots+\frac{A_h}{B_h}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{B_n}=P'\ ,$$

puisque cette quantité est supposée un $\begin{Bmatrix} maximum \\ minimum \end{Bmatrix}$, si l'on pose

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\ldots\ldots+\frac{A_g}{B_h}+\ldots\ldots+\frac{A_h}{B_g}+\ldots\ldots+\frac{A_n}{B_n}=Q'\ ,$$

on devra avoir

$$Q' \lessgtr P'\ ,$$

ce qui donnera, en substituant et supprimant, de part et d'autre, les termes communs,

$$\frac{A_g}{B_h}+\frac{A_h}{B_g} \lessgtr \frac{A_g}{B_g}+\frac{A_h}{B_h}\ ,$$

ou

A_g

$$A_gB_g+A_hB_h \lessgtr A_gB_h+A_hB_g ,$$

ou, en transposant et décomposant

$$(A_g-A_h)(B_g-B_h) \lessgtr 0 ;$$

ou, parce que A_g-A_h est supposé positif,

$$B_g-B_h \lessgtr 0 \quad \text{ou} \quad B_g \lessgtr B_h .$$

Ainsi, les termes de la première suite allant en décroissant, du premier au dernier, il faut pour le $\left\{\begin{matrix}\textit{maximum}\\ \textit{minimum}\end{matrix}\right\}$ que ceux de la seconde aillent en $\left\{\begin{matrix}\text{croissant}\\ \text{décroissant}\end{matrix}\right\}$, du premier au dernier.

Ce qui précède renferme la solution complette du problème proposé; mais M. Le Grand s'est, en outre, occupé du problème indiqué dans la note, et qui consiste à savoir, dans le cas où l'on donnerait simplement les $2n$ nombres qui doivent composer les deux suites, comment on devrait les répartir dans ces deux suites pour obtenir le *maximum* ou le *minimum*, soit de la somme des produits soit de la somme des quotiens. Il observe 1.° que, pour avoir le *maximum* de la somme des produits ou le *minimum* de la somme des quotiens, il faut, après avoir disposé les $2n$ nombres, par ordre de grandeur, du plus petit au plus grand, placer le second sous le premier, le quatrième sous le troisième, le sixième sous le cinquième, et ainsi de suite; 2.° que, pour avoir, au contraire, le *minimum* de la somme des produits ou le *maximum* de la somme des quotiens, il faut, après avoir

disposé les $2n$ nombres, par ordre de grandeur, du plus grand au plus petit, placer le dernier sous le premier, l'avant-dernier sous le second, le $(2n-2)^{me}$ sous le troisième, le $(2n-3)^{me}$ sous le quatrième, et ainsi de suite.

M. Le Grand remarque encore 1.° que, si l'on a m suites de n nombres chacune, et qu'il soit question de disposer les nombres qui composent chacune d'elles, de manière que la somme des produits des termes correspondans dans les m suites soit un *maximum*, il faudra encore, comme dans le cas de deux suites seulement, ranger les termes de chaque suite, par ordre de grandeur, du premier au dernier, de manière qu'ils aillent en croissant ou en décroissant, dans toutes les suites; 2.° que, si l'on a seulement mn nombres qu'il soit question de partager en m suites de n termes chacune, de manière à ce que la somme des produits des termes correspondans de ces m suites soit un *maximum*; il faudra, après avoir disposé ces mn nombres par ordre de grandeur, du plus petit au plus grand, former la première suite avec ces nombres, pris de n en n, à partir du premier, former la seconde avec ces nombres, pris de n en n, à partir du second, former la troisième avec ces nombres, pris de n en n, à partir du troisième, et ainsi de suite.

Les principes qui viennent d'être développés peuvent souvent être appliqués avec avantage; nous allons le prouver par un exemple.

Soient c, c', c'', trois droites et β, β', β'' trois angles donnés, dont la somme soit deux angles droits, et tels conséquemment que la moitié d'aucun ne soit un angle obtus, et proposons-nous de déterminer de quelle manière on doit accoupler ces trois angles avec les trois droites, pour que la fonction

$$\frac{c^2\text{Cos}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''+c'^2\text{Sin}.\beta\text{Cos}.\beta'\text{Sin}.\beta''+c''^2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Cos}.\beta''}{2\text{Sin}.\beta\text{Sin}.\beta'\text{Sin}.\beta''},$$

soit un *maximum*?

En introduisant les demi-angles, au lieu des angles même, on transforme facilement cette fonction en celle-ci

$$\tfrac{1}{4}\left\{\left[\frac{c^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta}+\frac{c'^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta'}+\frac{c''^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta''}\right]-\left[c^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta+c'^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'+c''^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta''\right]\right\}$$

or, pour que cette quantité soit un *maximum*, il faut évidemment que

$$\frac{c^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta}+\frac{c'^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta'}+\frac{c''^2}{\text{Tang.}\frac{1}{2}\beta''},$$

soit un *maximum*, et qu'en outre

$$c^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta+c'^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'+c''^2\text{Tang.}\tfrac{1}{2}\beta'',$$

soit un *minimum*.

Ces deux conditions se trouveront, à la fois, satisfaites, d'après ce qui précède, si c^2, c'^2, c''^2 allant en croissant, Tang.$\frac{1}{2}\beta$, Tang.$\frac{1}{2}\beta'$, Tang.$\frac{1}{2}\beta''$ vont au contraire en décroissant; ou, plus simplement, si, c, c', c'' allant en croissant, β, β', β'' vont en décroissant. Ce serait le contraire si la fonction proposée devait être un *minimum*.

La question que nous venons de traiter est celle dont s'est occupé M. Bidone à la page 380 du deuxième volume de ce recueil. On voit que l'application des principes développés ci-dessus en fournit une solution à la fois directe et élégante.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème de Géométrie.

On demande quelle est la courbe telle que, pour chacun de ses points, le rayon de courbures est une quatrième proportionnelle à l'abscisse, à l'ordonnée et à une droite donnée de grandeur ?

Problème de probabilité.

Une loterie étant composée de m numéros $1, 2, 3, \ldots m$, dont il en sort n à chaque tirage ; quelle probabilité y a-t-il que, parmi les n numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas k nombres consécutifs de la suite naturelle ?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Application de la méthode de maximis et minimis *à la recherche des grandeur et direction des diamètres principaux, dans les lignes et surfaces du second ordre qui ont un centre; ces lignes et surfaces étant rapportées à des axes de directions quelconques, passant par ce centre;*

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.

Le sujet dont je vais m'occuper a déjà été traité de diverses manières dans ce recueil; mais, outre qu'on a toujours supposé que les lignes et surfaces du second ordre étaient rapportées à des axes rectangulaires; ce qui ôte aux résultats une généralité souvent très-précieuse; la méthode que je vais suivre me paraît conduire plus directement et plus simplement au but que ne saurait le faire la transformation des coordonnées qui, dans le cas sur-tout où les coordonnées primitives ne sont pas rectangulaires, entraîne dans des calculs d'une extrême complication. Tel est le double motif qui me détermine à revenir encore sur ce sujet.

§. I.

Soit

$$Ax^2+By^2+2Cxy=D\,; \qquad (1)$$

l'équation d'une ligne du second ordre, rapportée à son centre et à deux axes faisant entre eux un angle γ.

En désignant par r la distance d'un point quelconque de cette courbe à son centre, on aura

$$x^2+y^2+2xy\text{Cos.}\gamma=r^2. \qquad (2)$$

Et la propriété qui caractérise les quatre sommets de la courbe est que, pour chacun d'eux, r doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Supposons donc que x et y soient les coordonnées de l'un de ces sommets, auquel cas r sera la moitié de l'un des diamètres principaux. Soit posé

$$y=px\ ;$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(Bp^2+2Cp+A)x^2=D\ ,$$
$$(p^2+2p\text{Cos.}\gamma+1)x^2=r^2\ ;$$

d'où on conclura, par l'élimination de x^2,

$$(Br^2-D)p^2+2(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)p+(Ar^2-D)=0\ ; \qquad (3)$$

différentiant cette équation, par rapport à p seulement, puisque, par l'hypothèse, $dr=0$, il viendra

$$(Br^2-D)p+(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)=0\ ,$$

d'où

$$p=-\frac{Cr^2-D\text{Cos.}\gamma}{Br^2-D}\ ,$$

cette valeur, substituée dans l'équation (3), donne

$$(Ar^2-D)(Br^2-D)-(Cr^2-D\text{Cos.}\gamma)^2=0\ ,$$

ou, en développant et ordonnant,

$$(AB-C^2)r^4-D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)r^2+D^2\text{Sin.}^2\gamma=0. \qquad (4)$$

Les quatre racines de cette équation, lesquelles seront, deux à deux, égales et de signes contraires, seront les distances du centre de la courbe à ses quatre sommets, ou, ce qui revient au même, ses quatre demi-diamètres principaux. Les deux valeurs de r^2, substituées dans celle de p, donneront, pour cette inconnue, deux valeurs

p', p'', et alors les directions des diamètres principaux seront données par les deux équations

$$y=p'x\ ,\quad y=p''x.$$

Pour que les deux valeurs de r^2, tirées de l'équation (4) soient réelles, il faut, comme l'on sait, que la quantité

$$(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)^2-4(AB-C^2)\text{Sin.}^2\gamma\ ,$$

soit positive ; or, cette quantité est la même chose que la suivante

$$(A-B)^2\text{Sin.}^2\gamma+\{2c-(A+B)\text{Cos.}\gamma\}^2\ ,$$

laquelle est essentiellement positive ; ainsi les deux valeurs de r^2 seront réelles, dans tous les cas.

Maintenant, les valeurs de r^2 peuvent être ou toutes deux positives, ou l'une positive et l'autre négative, ou enfin toutes deux négatives ; et, d'après les principes connus, l'équation (1) appartiendra à l'ellipse dans le premier cas, à l'hyperbole dans le second, et n'exprimera absolument rien dans le troisième. Dégageant donc le premier terme de l'équation (4) de son coefficient, et appliquant la règle de Descartes, on trouvera, après les réductions convenables, que l'équation (1) appartient à l'ellipse, si l'on a

$$AB-C^2>0\ ,\quad D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)>0\ ;$$

qu'elle appartient à l'hyperbole, si l'on a

$$AB-C^2<0\ ;$$

et qu'enfin elle n'exprime rien, si l'on a

$$AB-C^2>0\ ,\quad D(A+B-2C\text{Cos.}\gamma)<0.$$

En particulier les deux valeurs de r^2, et par conséquent celles de r, seront égales, si l'on a

$$(A-B)^2\text{Sin.}^2\gamma+\{2C-(A+B)\text{Cos.}\gamma\}^2=0\ ,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'on aura à la fois

$$A=B\ ,\quad 2C=(A+B)\text{Cos.}\gamma\ ;$$

et alors l'équation (1) appartiendra à un cercle.

Dans le cas particulier où les axes des coordonnées seront rectan-

gulaires, on aura $\text{Cos.}\gamma=0$, $\text{Sin.}\gamma=1$; et il viendra conséquemment

$$(AB-C^2)r^4-D(A+B)r^2+D^2=0\ ,$$

$$p=-\frac{Cr^2}{Br^2-D}\ ,$$

l'équation (1) appartiendra à l'ellipse, si l'on a

$$AB-C^2>0 \quad \text{et} \quad D(A+B)>0\ ;$$

à l'hyperbole, si l'on a

$$AB-C^2<0\ ;$$

et elle n'exprimera rien, si l'on a

$$AB-C^2>0 \quad \text{et} \quad D(A+B)<0.$$

En particulier, elle appartiendra au cercle, si l'on a, à la fois,

$$A=B \quad \text{et} \quad C=0.$$

Tout cela s'accorde avec les principes connus.

Supposons que les axes des coordonnées soient deux diamètres conjugués de la courbe; alors on devra avoir $C=0$. L'équation (1) deviendra

$$Ax^2+By^2=D\ ;$$

en sorte que les quarrés des demi-diamètres conjugués seront

$$\frac{D}{A}\ , \quad \frac{D}{B}\ ;$$

la somme des quarrés de ces demi-diamètres sera donc

$$\frac{D}{A}+\frac{D}{B}=\frac{D(A+B)}{AB}\ ;$$

et le produit de leurs quarrés et du quarré du sinus de l'angle qu'ils comprennent ou, ce qui revient au même, le quarré de l'aire du parallélogramme construit sur leurs grandeurs et directions, sera

$$\frac{D^2\text{Sin.}^2\gamma}{AB}.$$

Mais, dans la même hypothèse de $C=0$, l'équation (4) devient

$$r^4-D.\frac{A+B}{AB}r^2+\frac{D^2}{AB}\text{Sin.}^2\gamma=0\ ;$$

et, par la théorie des équations, $D.\frac{A+B}{AB}$ est la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux, et $\frac{D^2}{AB}$ Sin.$^2\gamma$ est le produit des quarrés de ces diamètres.

Donc, dans les lignes du second ordre qui ont un centre, 1.° *La somme des quarrés de deux demi-diamètres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des deux demi-diamètres principaux ;* 2.° *Le parallélogramme construit sur les grandeurs et directions de deux demi-diamètres conjugués quelconques est équivalant au rectangle construit sur les grandeurs et directions des deux demi-diamètres principaux.*

§. II.

Soit

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=D\,, \qquad (1)$$

l'équation d'une surface du second ordre, rapportée à son centre et à trois axes dont les directions soient telles qu'on ait

$$\text{Ang.}(y\,,z)=\alpha\,, \quad \text{Ang.}(z\,,x)=\beta\,, \quad \text{Ang.}(x\,,y)=\gamma.$$

En désignant par r la distance d'un point quelconque de cette surface à son centre, on aura

$$x^2+y^2+z^2+2yz\text{Cos.}\alpha+2zx\text{Cos.}\beta+2xy\text{Cos.}\gamma=r^2. \qquad (2)$$

Et la propriété qui caractérise les six sommets de la surface courbe est que, pour chacun d'eux, r doit être un *maximum* ou un *minimum*.

Supposons donc que x, y, z soient les coordonnées de l'un de ces sommets, auquel cas r sera la moitié de l'un des diamètres principaux. Soient posés

$$x=pz\,, \quad y=qz\,;$$

les équations (1) et (2) deviendront

$$(Ap^2+Bq^2+C+2A'q+2B'p+2C'pq)z^2=D\,,$$
$$(p^2+q^2+1+2q\text{Cos.}\alpha+2p\text{Cos.}\beta+2pq\text{Cos.}\gamma)z^2=r^2\,,$$

d'où on conclura, par l'élimination de z^2,

$$(Ar^2-D)p^2+(Br^2-D)q^2+2(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)pq$$
$$+2(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)p+2(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)q+(Cr^2-D)=0\ ; \qquad (3)$$

différentiant cette équation, par rapport à p et q seulement, puisque, par l'hypothèse, $dr=0$; et égalant séparément à zéro les multiplicateurs de dp et dq, il viendra

$$(Ar^2-D)p+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)q+(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)=0\ ,$$
$$(Br^2-D)q+(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)p+(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)=0\ ;$$

ce qui donne

$$p=\frac{(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)-(Br^2-D)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2}\ ,$$
$$q=\frac{(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)-(Ar^2-D)(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2}\ ;$$

substituant ces valeurs dans l'équation (3), elle deviendra

$$(Ar^2-D)(Br^2-D)(Cr^2-D)+2(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)$$
$$-(Ar^2-D)(A'r^2-D\text{Cos.}\alpha)^2-(Br^2-D)(B'r^2-D\text{Cos.}\beta)^2-(Cr^2-D)(C'r^2-D\text{Cos.}\gamma)^2=0,$$

ou, en développant et ordonnant,

$$\left.\begin{array}{l}(ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)r^6 \\[4pt] -D\left\{\begin{array}{l}(BC-A'^2)+2(B'C'-AA')\text{Cos.}\alpha\\+(CA-B'^2)+2(C'A'-BB')\text{Cos.}\beta\\+(AB-C'^2)+2(A'B'-CC')\text{Cos.}\gamma\end{array}\right\}r^4 \\[4pt] +D^2\left\{\begin{array}{l}A\text{Sin.}^2\alpha-2A'(\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)\\+B\text{Sin.}^2\beta-2B'(\text{Cos.}\beta-\text{Cos.}\gamma\text{Cos.}\alpha)\\+C\text{Sin.}^2\gamma-2C'(\text{Cos.}\gamma-\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta)\end{array}\right\}r^2 \\[4pt] -D^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0.\end{array}\right\} \qquad (4)$$

Les six racines de cette équation, lesquelles seront, deux à deux, égales et de signes contraires, seront les distances du centre de la surface courbe à ses six sommets, ou, ce qui revient au même, ses six demi-diamètres principaux. Les trois valeurs de r^2, substituées dans celles de p et q, donneront, pour ces inconnues, trois systèmes de valeurs p', q', p'', q'', p''', q''', et alors les directions des

diamètres principaux seront donnés par les trois systèmes d'équations

$$x=p'z\ , \quad x=p''z\ , \quad x=p'''z\ ,$$
$$y=q'z\ ; \quad y=q''z\ ; \quad y=q'''z\ .$$

On sait qu'une équation du troisième degré étant

$$ax^3+bx^2+cx+d=0\ ,$$

pour que ses trois racines soient réelles et inégales, il faut qu'on ait

$$4(3ac-b^2)(3bd-c^2)-(9ad-bc)^2>0\ ;$$

en appliquant cette condition aux valeurs de r^2, données par l'équation (4), on se convaincra qu'elles sont toutes trois réelles, et qu'ainsi on peut juger de leurs signes par les signes des termes de cette équation.

L'équation (1) appartiendra à l'*ellipsoïde*, si les trois valeurs de r^2 sont positives ; elle appartiendra à l'*hyperboloïde à une nappe*, si une seule des valeurs de r^2 est négative ; elle appartiendra à l'*hyperboloïde à deux nappes*, si une seule des valeurs de r^2 est positive ; enfin l'équation (1) n'exprimera absolument rien, si les valeurs de r^2, données par l'équation (4), sont toutes trois négatives ; c'est-à-dire, si tous les termes de cette équation ont le même signe.

Si deux des valeurs de r^2 sont égales ; c'est-à-dire si, en conservant les notations qui viennent d'être employées, on a

$$4(3ac-b^2)(3bd-c^2)=(9ad-bc)^2\ ,$$

l'équation (1) appartiendra à une surface de révolution. Si enfin les trois valeurs de r^2, étant positives, sont égales entre elles, ce qui arrivera, si l'on a, à la fois

$$3ac=b^2\ , \quad 3bd=c^2\ ;$$

l'équation (1) appartiendra à une sphère.

Dans le cas particulier où les axes des coordonnées seront rectangulaires, on aura

$$\text{Sin.}\alpha=1\ , \quad \text{Sin.}\beta=1\ , \quad \text{Sin.}\gamma=1\ ,$$
$$\text{Cos.}\alpha=0\ , \quad \text{Cos.}\beta=0\ , \quad \text{Cos.}\gamma=0\ ;$$

d'où

$$(ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)r^6$$
$$-D(BC+CA+AB-A'^2-B'^2-C'^2)r^4$$
$$+D^2(A+B+C)r^2-D^3=0\ ;$$

$$p=r^2.\frac{A'C'r^2-B'(Br^2-D)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-C'^2r^4}\ ,\quad q=r^2.\frac{B'C'r^2-A'(Ar^2-D)}{(Ar^2-D)(Br^2-D)-C'^2r^4}\ ;$$

résultats qui, aux notations près, coïncident parfaitement avec ceux qui ont été donnés par M. Bret (*).

Supposons présentement que les axes des coordonnées soient trois diamètres conjugués ; alors on devra avoir

$$A'=0\ ,\quad B'=0\ ,\quad C'=0\ ;$$

en sorte que l'équation (1) deviendra

$$Ax^2+By^2+Cz^2=D\ ;$$

les quarrés des demi-diamètres conjugués seront donc respectivement

$$\frac{D}{A}\ ,\quad \frac{D}{B}\ ,\quad \frac{D}{C}\ ;$$

et l'équation (4) deviendra

$$ABCr^6-D(BC+CA+AB)r^4$$
$$+D^2(A\text{Sin.}^2\alpha+B\text{Sin.}^2\beta+C\text{Sin.}^2\gamma)r^2$$
$$-D^3(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0\ ,$$

ou

$$r^6-\left\{\frac{D}{A}+\frac{D}{B}+\frac{D}{C}\right\}r^4$$
$$+\left\{\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\text{Sin.}^2\alpha+\frac{D}{C}\cdot\frac{D}{A}\text{Sin.}^2\beta+\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\text{Sin.}^2\gamma\right\}r^2$$
$$-\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=0;$$

d'où l'on voit, par la théorie des équations, que la somme des quarrés des demi-diamètres principaux est

$$\frac{D}{A}+\frac{D}{B}+\frac{D}{C}\ ;$$

(*) Voyez les pages 33 et 144 du 2.e volume des *Annales*.

que

que la somme des produits de ces quarrés deux à deux est

$$\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,\text{Sin.}^2\alpha+\frac{D}{C}\cdot\frac{D}{A}\,\text{Sin.}^2\beta+\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\,\text{Sin.}^2\gamma\ ;$$

et qu'enfin le produit de ces mêmes quarrés ou le quarré du produit des demi-diamètres principaux est

$$\frac{D}{A}\cdot\frac{D}{B}\cdot\frac{D}{C}\,(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma).$$

Donc, dans les surfaces du second ordre qui ont un centre, 1.° *La somme des quarrés de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des quarrés des trois demi-diamètres principaux ;* 2.° *la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est égale à la somme des quarrés des aires des trois faces adjacentes à l'un des angles trièdres du parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux ;* 3.° *enfin, le parallélipipède construit sur les grandeurs et directions de trois demi-diamètres conjugués quelconques, est équivalent au parallélipipède rectangle construit sur les grandeurs et directions des trois demi-diamètres principaux.*

Ainsi, en dénotant, pour plus de simplicité, par a, b, c, les trois demi-diamètres principaux, et par a', b', c' trois demi-diamètres conjugués quelconques, on aura les trois équations

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2\ ,$$

$$b'^2c'^2\text{Sin.}^2\alpha+c'^2a'^2\text{Sin.}^2\beta+a'^2b'^2\text{Sin.}^2\gamma=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\ ,$$

$$a'^2b'^2c'^2(1-\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2\beta-\text{Cos.}^2\gamma+2\text{Cos.}\alpha\text{Cos.}\beta\text{Cos.}\gamma)=a^2b^2c^2\ ;$$

sur quoi il faut remarquer que quelques-unes des lignes a, a', b, b', c, c' peuvent être imaginaires, et qu'alors leurs quarrés sont négatifs.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Second mémoire sur les facultés numériques; (*)

Par M. KRAMP, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



1. LES produits dont les facteurs procèdent suivant une progression arithmétique, et que j'ai nommés *Facultés numériques*, n'ont pas été inutiles au progrès de l'analise. Ils ont servi à exprimer, par un seul terme, et à trouver, d'une manière fort simple, les valeurs numériques de toutes les fonctions transcendantes qui dépendent du cercle, aussi bien que quelques classes, très-nombreuses, d'intégrales définies. Il s'en faut de beaucoup que cette mine soit épuisée. Le langage de l'analise transcendante a été borné, jusqu'ici, aux seules idées de fonctions exponentielles et de fonctions circulaires; et il est naturel de considérer cette extrême pénurie, comme une des causes principales de l'impossibilité où nous nous trouvions de résoudre le plus grand nombre des problèmes qui se présentaient à nous. Les facultés numériques viennent, fort à propos, pour enrichir ce langage, et pour étendre ainsi le domaine de la science.

2. J'ai prouvé, dans un premier mémoire, que toute faculté était réductible à la forme très-simple $1^{y|1}$ ou $y!$; mais, comme les facultés de cette dernière forme ne dispensent pas de la considération des autres ; afin de faire correspondre une différence de dénomination à une différence de symboles, j'appellerai, à l'avenir, *Factorielles* les fonctions de la forme générale $a^{y|r}$, et je réserverai exclusivement le nom de *Facultés numériques*, ou simplement de *Facultés*, pour

(*) Voyez la page première de ce volume.

désigner les fonctions de la forme $1^{y|1}$ ou $y!$, auxquelles se réduisent les premières, dans le cas particulier où l'on a $a=1$ et $r=1$.

3. La factorielle $a^{m|r}$ ou $a(a+r)(a+2r)(a+3r)\ldots\ldots(a+mr-r)$ peut toujours être développée en une série de la forme

$$a^m+Aa^{m-1}r+Ba^{m-2}r^2+\ldots\ldots+Mr^m.$$

J'ai fait voir ailleurs (*) que, dans le cas d'un exposant infiniment petit, les coefficiens A, B, C,..... devenaient ces nombres même dont l'usage, dans le calcul sommatoire, a été remarqué par leur illustre inventeur Jacques Bernoulli. Mettant dm à la place de m, et désignant par $-B_1\text{d}m$, $-B_2\text{d}m$, $-B_3\text{d}m$,.... les valeurs que reçoivent les coefficiens A, B, C,...., dans le cas d'un exposant infiniment petit, on aura

$$\tfrac{1}{2}=B_1\ ,$$
$$\tfrac{1}{3}=B_1-2B_2\ ,$$
$$\tfrac{1}{4}=B_1-3B_2+3B_3\ ,$$
$$\tfrac{1}{5}=B_1-4B_2+6B_3-4B_4\ ,$$

et en général

$$\frac{1}{n+1}=B_1-\frac{n}{1}B_2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}B_3-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}B_4+\ldots\pm\frac{n}{1}B_n.$$

En faisant le calcul de ces nombres, on verra que tous ceux d'un indice *impair*, tels que B_1, B_3, B_5,.... sont égaux à *zéro*, à l'exception du premier B_1 qui est $\frac{1}{2}$; et que tous ceux d'un indice *pair*, savoir B_2, B_4; B_6,.... sont alternativement *positifs* et *négatifs*. Leurs valeurs sont

$$B_2=+\tfrac{1}{12},\ B_4=-\tfrac{1}{120},\ B_6=+\tfrac{1}{252},\ B_8=-\tfrac{1}{240},\ldots..$$

4. Les nombres de Bernoulli nous mènent naturellement aux deux fonctions que j'ai désignées par Λt et Γt. La première Λt, par laquelle nous exprimons la série

$$B_1t+B_2t^2+B_4t^4+B_6t^6+\ldots,$$

sert à trouver la première dériver de la factorielle $a^{y|r}$, dans laquelle nous regardons l'exposant y comme la variable de la fonction. En faisant, pour abréger, $a+ry=t$, on a

(*) Voyez *Elémens d'arithmétique universelle*, page 360, n.os 557 et suivans.

$$\mathrm{D}(a^{y|r}) = a^{y|r}\left(\mathrm{Log}.t - \Lambda\frac{r}{t}\right). \quad (*)$$

La seconde Γt, par laquelle nous représentons la série

$$B_2 t + \tfrac{1}{3}B_4 t^3 + \tfrac{1}{5}B_6 t^5 + \tfrac{1}{7}B_8 t^7 + \ldots\ldots,$$

est liée avec la première, par l'équation linéaire très-simple

$$B_1 t + t^2\mathrm{D}\Gamma t = \Lambda t.$$

Elle est essentielle pour trouver le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$. On a, en effet,

$$\mathrm{Log}.(a^{y|r}) = -y(1 - \mathrm{Log}\,a) + \left(\frac{t}{r} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}.\frac{t}{a} - \Gamma\frac{r}{a} + \Gamma\frac{r}{t}.$$

5. Le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$ que, pour abréger, nous représenterons simplement par Y, est remarquable par la forme de ses dérivées successives. On a d'abord

$$\mathrm{D}\mathrm{Log}.Y = \mathrm{Log}.t - \Lambda\frac{r}{t}:$$

sur quoi on peut remarquer que c'est l'expression de la somme de fractions

$$\frac{r}{a} + \frac{r}{a+r} + \frac{r}{a+2r} + \ldots + \frac{r}{t-r},$$

augmentée de $\mathrm{Log}.a - \Lambda\frac{r}{a}$. Si ensuite, pour abréger, on désigne simplement par $\Sigma\frac{r^n}{t^n}$, la somme infinie de fractions

$$\frac{r^n}{t^n} + \frac{r^n}{(t+r)^n} + \frac{r^n}{(t+2r)^n} + \frac{r^n}{(t+3r)^n} + \ldots\ldots,$$

on aura, en faisant toujours $a^{y|r} = Y$,

$$\mathrm{D}^2\mathrm{Log}.X = +\ \ \Sigma\frac{r^2}{t^2},$$

$$\mathrm{D}^3\mathrm{Log}.Y = -\ 2\Sigma\frac{r^3}{t^3},$$

$$\mathrm{D}^4\mathrm{Log}.Y = +\ 6\Sigma\frac{r^4}{t^4},$$

(*) La lettre D est employée ici comme signe de dérivation ; en sorte qu'en général

$$\mathrm{D}\varphi(x) = \frac{\mathrm{d}.\varphi(x)}{\mathrm{d}x}.$$

$$\mathrm{D}^5\mathrm{Log}.Y = -\ 24\Sigma\frac{r^5}{t^5},$$

$$\mathrm{D}^6\mathrm{Log}.Y = +120\Sigma\frac{r^6}{t^6},$$

....

6. Ces sommes de fractions, se trouvent facilement, par les formules connues. On a, en effet,

$$\Sigma\frac{r^2}{t^2} = \frac{r}{t} + \frac{r^2}{2t^2} + 2B_2\frac{r^3}{t^3} + 4B_4\frac{r^5}{t^5} + 6B_6\frac{r^7}{t^7} + \ldots,$$

$$\Sigma\frac{r^3}{t^3} = \frac{r^2}{2t^2} + \frac{r^3}{2t^3} + 3B_2\frac{r^4}{t^4} + 10B_4\frac{r^6}{t^6} + 21B_6\frac{r^8}{t^8} + \ldots,$$

$$\Sigma\frac{r^4}{t^4} = \frac{r^3}{3t^3} + \frac{r^4}{2t^4} + 4B_2\frac{r^5}{t^5} + 20B_4\frac{r^7}{t^7} + 56B_6\frac{r^9}{t^9} + \ldots,$$

....

Toutes ces séries peuvent être regardées comme convergentes à volonté, attendu qu'on n'aura qu'à calculer à part quelques-uns des premiers termes de $\Sigma\frac{r^n}{t^n}$, et employer ensuite la formule, pour trouver la somme des autres. Lorsque, dans ces formules, on suppose à r une valeur *imaginaire*, on est conduit à une suite de théorèmes du plus grand intérêt dans l'analise, et sur lesquels nous reviendrons en son lieu.

7. En désignant par la série

$$Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots\ldots,$$

ordonnée suivant les puissances de l'exposant y, le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$, les coefficiens A, B, C, D,..... seront ce que deviennent les dérivées de ce logarithme, dans le cas de $y=0$, ou de $t=a$, respectivement divisées par 1, 2, 6, 24, 120,.... On aura ainsi

$$A = \mathrm{Log}\,a - \Lambda\frac{r}{a};$$

$$B = +\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{r^2}{a^2},$$

$$C = -\tfrac{1}{3}\Sigma\frac{r^3}{a^3},$$

$$D = +\tfrac{1}{4}\Sigma\frac{r^4}{a^4},$$

$$E = -\tfrac{1}{5}\Sigma\frac{r^5}{a^5},$$

. . . .

De Log.$a^{x|r}$ on passe facilement à cette factorielle elle-même ; et, si l'on représente par

$$1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + D'y^4 + \dots\dots$$

la série qui l'exprime ; on aura

$$A' = A,$$
$$2B' = AA' + 2B,$$
$$3C' = AB' + 2BA' + 3C,$$
$$4D' = AC' + 2BB' + 3CA' + 4D,$$

. . . .

8. On peut remarquer, au sujet des nombres de Bernoulli, que les séries que nous allons désigner, et dont nous ferons un usage fréquent, dans le calcul sommatoire, sont toutes parfaitement sommables. En faisant, pour abréger, $e^y = x$, on a

$$B_2.\frac{y^2}{1.2} + B_4.\frac{y^4}{1.2.3.4} + B_6.\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots = \text{Log}.\frac{e^{\frac{1}{2}y} - e^{-\frac{1}{2}y}}{y},$$

$$B_2.\frac{y}{1} + B_4.\frac{y^3}{1.2.3} + B_6.\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \dots = -\frac{1}{y} + \frac{1}{2}.\frac{x+1}{x-1},$$

$$B_2 + B_4.\frac{y^2}{1.2} + B_6.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots = +\frac{1}{y^2} - \frac{x}{(x-1)^2},$$

$$B_4.\frac{y}{1} + B_6.\frac{y^3}{1.2.3} + B_8.\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \dots = -\frac{2}{y^3} + \frac{x(x+1)}{(x-1)^3},$$

$$B_4 + B_6.\frac{y^2}{1.2} + B_8.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots = +\frac{6}{y^4} - \frac{x(x^2+4x+1)}{(x-1)^4},$$

$$B_6.\frac{y}{1} + B_8.\frac{y^3}{1.2.3} + B_{10}.\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \dots = -\frac{24}{y^5} + \frac{x(x^3+11x^2+11x+1)}{(x-1)^5}$$

$$B_6 + B_8.\frac{y^2}{1.2} + B_{10}.\frac{y^4}{1.2.3.4} + \dots = +\frac{120}{y^6} - \frac{x(x^4+26x^3+66x^2+26x+1)}{(x-1)^6},$$

$$B_8.\frac{y}{1} + B_{10}.\frac{y^3}{1.2.3} + B_{12}.\frac{y^5}{1.2.3.4.5} + \dots = -\frac{720}{y^7} + \frac{x(x^5+57x^4+302x^3+302x^2+57x+1)}{(x-1)^7},$$

et ainsi des autres. La loi que suivent les coefficiens des polynômes

fonctions de x qui entrent dans les seconds membres se présente assez naturellement ; on a, par exemple, pour le dernier

$$57=5.1+2.26\,,$$
$$302=4.26+3.66\,,$$
$$302=3.66+4.26\,,$$
$$57=2.26+5.1\,;$$

et ainsi des autres. La *seconde* de ces séries a été donnée par EULER (*Inst. calculi differentialis*, part. II, chap. VI, §. 163.). De celle-ci j'ai déduit la *première*, par intégration, et les autres, par des différentiations successives.

9. Si, dans la première de ces séries, on suppose $y=2\varphi\sqrt{-1}$, on est conduit à celle qui suit :

$$\text{Log.}\frac{\varphi}{\text{Sin.}\varphi}=4B_2.\frac{\varphi^2}{1.2}-16B_4.\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}+64B_6.\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6}-\ldots.$$

Cette série, peu connue, est peut-être la plus convergente de toutes celles qui font connaître le logarithme du sinus d'un angle proposé. La supposition de y imaginaire, appliquée aux autres séries, conduit aussi à des théorèmes fort intéressans.

10. Ayant trouvé le logarithme naturel de la factorielle $a^{y|r}$ égal à

$$-y(1-\text{Log}.a)+\left(\frac{t}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log}.\frac{t}{a}-\Gamma\frac{r}{a}+\Gamma\frac{r}{t}\,,$$

la lettre t désignant toujours $a+ry$, il importe d'examiner ce que devient cette expression, dans le cas d'un exposant *imaginaire*. Soit donc $y=p+iq$, la lettre i désignant la racine quarrée de *moins un* ; on aura

$$\text{Log}.(a^{p+iq|r})=(p+iq)(\text{Log}.a-1)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}+iq\right)\text{Log}.\frac{a+pr+iqr}{a}$$
$$-\Gamma\frac{r}{a}+\Gamma\frac{r}{a+pr+iqr}.$$

Ici, si l'on fait

$$k^2=(a+pr)^2+(qr)^2\,,$$
$$\text{Tang}.\varphi=\frac{qr}{a+pr}\,;$$

on aura

$$a+pr+iqr=k(\text{Cos.}\varphi+i\text{Sin.}\varphi)\ ,$$

$$\text{Log.}(a+pr+iqr)=\text{Log.}\,k+i\varphi\ ,$$

le logarithme de $a^{p+iq|r}$ prendra donc la forme d'un binôme $M+iN$, dans lequel on aura

$$M=p(-1+\text{Log.}a)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right)\text{Log.}\frac{k}{a}-q\varphi-\Gamma\,\frac{r}{a}$$

$$+B_2.\frac{r}{k}\,\text{Cos.}\varphi+B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Cos.}3\varphi+B_6.\frac{r^5}{5k^5}\text{Cos.}5\varphi+\ldots\ ;$$

$$N=q(-1+\text{Log.}a)+\left(p-\frac{1}{2}+\frac{a}{r}\right)\varphi+q\text{Log.}\frac{k}{a}$$

$$-B_2.\frac{r}{k}\,\text{Sin.}\varphi-B_4.\frac{r^3}{3k^3}\text{Sin.}3\varphi-B_6.\frac{r^5}{5k^5}\text{Sin.}5\varphi-\ldots\ ;$$

les deux séries sont convergentes à volonté.

11. Ayant ainsi

$$\text{Log.}(a^{p+iq|r})=M+iN\ ,$$

il est visible qu'on aura

$$\text{Log.}(a^{p-iq|r})=M-iN\ ;$$

ce qui donnera

$$\text{Log.}(a^{p+iq|r})(a^{p-iq|r})=2M\ ,$$

$$\text{Log.}\frac{a^{p+iq|r}}{a^{p-iq|r}}=2iN\ ;$$

d'où on conclura

$$\frac{a^{p+iq|r}}{a^{p-iq|r}}=e^{2iN}=\text{Cos.}2N+i\text{Sin.}2N.$$

Dans le cas, très-fréquent, de $p=0$, lequel donne

$$k^2=a^2+q^2r^2\ ,\quad \text{Tang.}\varphi=\frac{qr}{a}\ ;$$

on aura

$$M=\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}\frac{k}{a}-q\varphi-\Gamma\,\frac{r}{a}+B_2.\frac{r}{k}\,\text{Cos}\varphi+B_4.\frac{r^3}{3k^3}\,\text{Cos.}3\varphi+\ldots,$$

$$N=q(-1+\text{Log.}a)+\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\varphi+q\text{Log.}\frac{k}{a}-B_2.\frac{r}{k}\text{Sin.}\varphi-B_4.\frac{r^3}{3k^3}\,\text{Sin.}3\varphi-\ldots\ ;$$

et par suite

$$\text{Log.}a^{iq|r}=M+iN\ ,$$

$$\text{Log.}a^{-iq|r}=M-iN\ ;$$

d'où

d'où

$$\text{Log.}a^{iq|r}\times a^{-iq|r}=2M\ ,\quad \text{Log.}\frac{a^{iq|r}}{a^{-iq|r}}=2iN.$$

12. Quelles que soient la base a et la différence r, la factorielle $a^{y|r}$, dans les deux cas de r positif et de r négatif, qui doivent toujours être soigneusement distingués, sera réductible à la faculté $1^{y|1}$, pour laquelle nous avons proposé la notation très-simple $y!$, devenue nécessaire, par l'usage très-fréquent de ce genre particulier de fonctions, dans la plupart des opérations de haute analise. Nous avons observé, dans un premier mémoire, que le passage des factorielles aux facultés s'exécutait au moyen des deux formules

$$a^{y|r}=\frac{\left(\frac{a}{r}-1+y\right)!}{\left(\frac{a}{r}-1\right)!}r^y\ ;\quad a^{y|-r}=\frac{\left(\frac{a}{r}\right)!}{\left(\frac{a}{r}-y\right)!}r^y.$$

La supposition de $a=1$, $r=1$ donne aux formules précédemment calculées une très-grande simplicité. On a alors

$$\text{Log.}y!=-y+(y+\tfrac{1}{2})\text{Log.}(1+y)-\Gamma 1+\Gamma\frac{1}{1+y}\ ,$$

formule qu'on peut rendre convergente à volonté, en y introduisant un nombre entier arbitraire h, qu'il suffira de prendre de 4 à 6. Il viendra ainsi

$$\text{Log.}y!=-h-y-\text{Log.}(1+y)^{h|1}+(h+\tfrac{1}{2}+y)\text{Log.}(1+h+y)-\Gamma 1+\Gamma\frac{1}{1+h+y}.$$

Sur quoi on doit observer qu'il s'agit toujours ici de logarithmes naturels.

13. Si, dans cette supposition de $a=r=1$, l'exposant y prenait la forme du binôme imaginaire $p+iq$, en posant alors

$$k^2=(1+p)^2+q^2,\quad \text{Tang.}\varphi=\frac{q}{1+p}\ ;$$

$$M=-p+(p+\tfrac{1}{2})\text{Log.}k-q\varphi-\Gamma 1+B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k}+B_4\frac{\text{Cos.}3\varphi}{3k^3}+\ldots,$$

$$N=-q+(p+\tfrac{1}{2})\varphi+q\text{Log.}k-B_2\frac{\text{Sin.}\varphi}{k}-B_4\frac{\text{Sin.}3\varphi}{3k^3}-\ldots,$$

il viendrait

$$\text{Log.}(p+iq)! = M+iN\ ,\quad \text{Log.}(p-iq)! = M-iN.$$

Posant, de plus, $p=0$, ce qui donne

$$k^2 = 1+q^2\ ,\quad \text{Tang.}\varphi = q$$

$$M = \tfrac{1}{2}\text{Log.}k - q\varphi - \Gamma 1 + B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k} + B_4\frac{\text{Cos.}3\varphi}{3k^3} + \ldots\ldots,$$

$$N = -q + \tfrac{1}{2}\varphi + q\text{Log.}k - B_2\frac{\text{Sin.}\varphi}{k} - B_4\frac{\text{Sin.}3\varphi}{3k^3} + \ldots\ldots,$$

on aura

$$\text{Log.}(+iq)! = M+iN\ ,\quad \text{Log.}(-iq)! = M-iN\ ,$$

ce qui donnera encore

$$\text{Log.}(+iq)!\times(-iq)! = 2M\ ,\quad \text{Log.}\frac{(+iq)!}{(-iq)!} = 2iN.$$

14. Le logarithme de $y!$ pouvant toujours être développé en une série de la forme

$$Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots,$$

on aura dans le cas actuel de $a=r=1$,

$$-A = \Lambda 1 \qquad\qquad = B_1+B_2+B_4+B_6+\ldots.,$$

$$+2B = 1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\ldots = \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+2B_2+4B_4+6B_6+\ldots.,$$

$$-3C = 1+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{64}+\ldots = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+3B_2+10B_4+21B_6+\ldots.,$$

$$+4D = 1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{81}+\tfrac{1}{256}+\ldots = \tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}+4B_2+20B_4+56B_6+\ldots.,$$

$$-5E = 1+\tfrac{1}{32}+\tfrac{1}{243}+\tfrac{1}{1024}+\ldots = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}+5B_2+35B_4+126B_6+\ldots.,$$

$$+6F = 1+\tfrac{1}{64}+\tfrac{1}{729}+\tfrac{1}{4096}+\ldots = \tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}+6B_2+56B_4+252B_6+\ldots.,$$

. . . .

Les valeurs numériques de toutes ces sommes de puissances sont connues et calculées ; quant à celle de $\Lambda 1$, elle est

$$0,\ 57721\ 56649\ldots\ldots$$

On sait de plus que les sommes à indice *pair* sont réductibles aux puissances *paires* de π ; d'où l'on obtient

$$B=+2\,B_2.\frac{\pi^2}{1.2}\,,$$

$$D=-2^3B_4.\frac{\pi^4}{1.2.3.4}\,,$$

$$F=+2^5B_6.\frac{\pi^6}{1.2.3.4.5.6}\,,$$

$$H=-2^7B_8.\frac{\pi^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}\,,$$

. . . .

Quant aux autres coefficiens A, C, E, ... l'analise ne nous offre pas les mêmes moyens de les obtenir ; il faudrait, pour y parvenir, interpoler la série des nombres de Bernoulli, d'après une loi probablement fort simple, mais que nous ne connaissons pas encore.

15. Ayant

$$\text{Log.}(+y)!=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots\,;$$

on doit avoir

$$\text{Log.}(-y)!=-Ay+By^2-Cy^3+Dy^4-\ldots\ldots\,;$$

de là résulte

$$\text{Log.}(+y)!\times(-y)!=2By^2+2Dy^4+2Fy^6+\ldots\ldots\,;$$

en changeant y en iy, on aura de même

$$\text{Log}\,(+iy)!\times(-iy)!=-2By^2+2Dy^4-2Fy^6+\ldots\ldots$$

16. On a vu (8) que

$$B_2.\frac{y^2}{1.2}+B_4.\frac{y^4}{1.2.3.4}+B_6.\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots=\text{Log.}\,\frac{e^{\frac{1}{2}y}-e^{-\frac{1}{2}y}}{y}\,,$$

En remplaçant y par iy, on aura, après les réductions connues,

$$-B_2.\frac{y^2}{1.2}+B_4.\frac{y^4}{1.2.3.4}-B_6.\frac{y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots=\text{Log.}\left(\frac{2}{y}\,\text{Sin.}\,\frac{y}{2}\right).$$

Les réductions appliquées aux valeurs des logarithmes de $(+y)!(-y)!$ et de $(+iy)!(-iy)!$ qu'on vient de trouver, conduisent aux deux théorèmes très-importans qui suivent ;

THÉORÈME I. $(+y)^{!}(-y)^{!}=\frac{\pi y}{\text{Sin.}\pi y}$.

THÉORÈME II. $(+iy)^{!}(-iy)^{!}=\frac{2\pi y}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}$.

Les principes généraux étant posés, proposons-nous la solution générale des deux problèmes qui suivent :

17. *PROBLÈME I. Évaluer numériquement le produit*

$$\left\{1-\frac{x^2}{a^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+r)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+2r)^2}\right\}\left\{1-\frac{x^2}{(a+3r)^2}\right\}\ldots\ldots$$

continué à l'infini ?

Solution. Ce produit se décompose dans ceux-ci

$$\frac{a-x}{a}\cdot\frac{a-x+r}{a+r}\cdot\frac{a-x+2r}{a+2r}\cdot\frac{a-x+3r}{a+3r}\ldots\ldots,$$

$$\frac{a+x}{a}\cdot\frac{a+x+r}{a+r}\cdot\frac{a+x+2r}{a+2r}\cdot\frac{a+x+3r}{a+3r}\ldots\ldots;$$

dans mon *Analise des réfractions*, je les ai réduit respectivement à

$$\frac{(a-x)^{\frac{x}{r}|r}}{(\text{infin}.r)^{\frac{x}{r}}},\qquad \frac{(a+x)^{-\frac{x}{r}|r}}{(\text{infin}.r)^{-\frac{x}{r}}},$$

ce qui rend le produit cherché égal au simple produit des deux factorielles

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r},\quad (a+x)^{-\frac{x}{r}|r};$$

il ne reste donc plus qu'à réduire ces factorielles aux facultés, ce qui se fait à l'aide des formules ci-dessus (12). En posant, pour abréger, $\frac{a}{r}-1=f$, on trouvera

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r}=\frac{f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!}r^{\frac{x}{r}},\quad (a+x)^{-\frac{x}{r}|r}=\frac{f!}{\left(f+\frac{x}{r}\right)!}r^{-\frac{x}{r}};$$

d'où on conclura

$$(a-x)^{\frac{x}{r}|r}.(a+x)^{-\frac{x}{r}|r}=\frac{f!f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!\left(f+\frac{x}{r}\right)!};$$

la solution du problème proposé sera donc réduite à la détermination des trois facultés $f!$, $\left(f-\frac{x}{r}\right)!$, $\left(f+\frac{x}{r}\right)!$ dont on trouvera les valeurs numériques toutes calculées, dans la table donnée à la page 6 de ce volume. (*)

18. *PROBLÈME II. Évaluer numériquement le produit*

$$\left\{1+\frac{x^2}{a^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+r)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+2r)^2}\right\}\left\{1+\frac{x^2}{(a+3r)^2}\right\}\ldots\ldots$$

continué à l'infini ?

Solution. En continuant de faire $\frac{a}{r}-1=f$, il suffira de remplacer x par ix, dans la formule qu'on vient de trouver. Le produit demandé deviendra égal à

(*) Depuis l'impression de la table de M. Bessel, nous nous sommes aperçu que M. Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral* (Paris, 1811), avait publié une table du même genre, et nous venons d'apprendre qu'une pareille table venait aussi d'être calculée par M. Gauss. Voilà donc trois géomètres du premier ordre qui, faute de moyens rapides de communication, ont consommé un temps précieux en de pénibles calculs, pour parvenir aux mêmes résultats.

M. Legendre, dans sa table, désigne par $a-1$ ce que M. Kramp représente par y, et par Γ ce que M. Kramp désigne par $y!$. Cette table, calculée par une méthode analogue à celle qui a été indiquée dans la note de la page 12 de ce volume, ne contient les logarithmes de la faculté $y!$ qu'à sept décimales seulement, et encore la septième décimale n'y est pas toujours exacte ; on n'y trouve pas non plus les différences des logarithmes qu'elle renferme ; mais ces logarithmes y sont calculés pour les valeurs de y de millième en millième, ce qui rend à la fois les interpolations plus faciles et moins fréquemment nécessaires. Les détails dans lesquels entre M. Legendre, sur le calcul de cette table, et sur la nature, les propriétés et les usages des nombres qu'elle renferme, sont d'ailleurs du plus grand intérêt.

J. D. G.

$$\frac{f!f!}{\left(f-\frac{ix}{r}\right)!\left(f+\frac{ix}{r}\right)!}.$$

Les logarithmes des deux facultés du dénominateur sont réductibles aux formes $M-iN$ et $M+iN$, ce qui rend le logarithme de leur produit égal à $2M$. Il serait fort à désirer que quelque calculateur courageux voulût calculer les binômes $M+iN=\text{Log.}(iy)!$, pour toutes les valeurs de y depuis 0 jusqu'à 1, de même que nous devons à M. le professeur Bessel une table des logarithmes de $y!$, dans le cas d'une base réelle. En attendant, la série (13), qui a l'avantage d'être convergente à volonté, nous fournit un moyen très-expéditif de trouver la valeur numérique de $2M$, logarithme du produit $\left(f-\frac{ix}{r}\right)!\left(f+\frac{ix}{r}\right)!$. Il faudra, pour en faire usage, déterminer l'angle φ et le coefficient k de manière qu'on ait

$$\text{Tang.}\varphi=\frac{x}{a}\ ,\quad k^2=\frac{a^2+x^2}{r^2}\ ,$$

ce qui donne

$$k=\frac{a}{r\text{Cos.}\varphi}\ ;$$

et on aura

$$M=-\frac{a}{r}+1+\left(\frac{a}{r}-\frac{1}{2}\right)\text{Log.}k-\frac{x}{r}\varphi-\Gamma 1+B_2\frac{\text{Cos.}\varphi}{k}+B_4\frac{\text{Cos.}3\varphi}{3k^3}+\ldots,$$

19. Appliquant la solution de ces deux problèmes au cas particulier de $a=r=\varpi$, qui donne $f=0$, et qui rend (15) la variable $y=\frac{x}{\varpi}$, d'où $\varpi y=x$, on sera conduit aux théorèmes très-connus, démontrés par EULER (*Introd. in. anali. infin.*, 1.re partie, n.os 156 et suivans.); savoir :

$$\text{Sin.}\varphi=\varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4\varpi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\ldots\ ,$$

$$\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}=\varphi\left(1+\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{\varphi^2}{9\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

20. Si dans (17) on fait $a=\frac{\pi}{2}$, $r=\pi$, on aura, d'un côté, le produit

$$\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

continué à l'infini, lequel, par conséquent, sera égal à ce que devient la fraction

$$\frac{f!f!}{\left(f-\frac{x}{r}\right)!\left(f+\frac{x}{r}\right)!},$$

par cette supposition qui donne

$$f=-\tfrac{1}{2}=-1+\tfrac{1}{2},$$

$$f+\frac{x}{r}=-\tfrac{1}{2}+\frac{x}{r}=\quad-\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{r}\right),$$

$$f-\frac{x}{r}=-\tfrac{1}{2}-\frac{x}{r}=-1+\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{r}\right).$$

La faculté $f!$ devient ainsi $2(\tfrac{1}{2})!=\sqrt{\pi}$. La faculté $\left(f-\frac{x}{r}\right)!$ deviendra

$$\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)!}{\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}},$$

et le produit des deux facultés $\left(-\frac{1}{2}+\frac{x}{\pi}\right)!$ et $\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{\pi}\right)!$ sera (16)

$$\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\text{Sin.}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\text{Cos.}x}.$$

Après avoir employé toutes ces réductions, on sera conduit au théorème très-connu,

$$\text{Cos.}\varphi=\left(1-\frac{4\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\left(1-\frac{4\varphi^2}{25\varpi^2}\right)\ldots\ldots$$

21. Et si, dans cette dernière formule, on change φ en $i\varphi$, elle deviendra

$$\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}=\left(1+\frac{4\varphi^2}{\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{9\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{25\varpi^2}\right)\left(1+\frac{4\varphi^2}{49\varpi^2}\right)\ldots\ldots;$$

formule connue depuis l'analise d'Euler.

22. Les formules (17) et (19) nous conduisent aux deux théorèmes qui suivent

$$h!(1-h)!=\frac{h(1-h)}{\text{Sin.}h\varpi}.\varpi\;;$$

$$(\tfrac{1}{2}-h)!(\tfrac{1}{2}+h)!=\frac{(\frac{1}{2}-h)(\frac{1}{2}+h)}{\text{Cos.}h\varpi}.\varpi\,.$$

Ces deux formules, qui sont identiques entre elles, procureront à ceux qui voudront s'occuper de la construction d'une table des facultés, pour les fractions décimales comprises entre o et 1, l'avantage précieux de diminuer leur travail de moitié, en ne les obligeant à le pousser que jusqu'à $h=\frac{1}{2}=0{,}5$; ce qui donnera, en outre, une grande convergence à la série qu'on est obligé d'employer pour le calcul de cette table. En changeant h en ih, on aura pareillement

$$(ih)!(1-ih)!=\frac{2h(1-ih)}{e^{h\varpi}-e^{-h\varpi}}.\varpi\;;$$

$$(\tfrac{1}{2}-ih)!(\tfrac{1}{2}+ih)!=\frac{2(\frac{1}{2}-ih)(\frac{1}{2}+ih)}{e^{h\varpi}+e^{-h\varpi}}.\varpi=\frac{2(\frac{1}{4}+h^2)}{e^{h\varpi}+e^{-h\varpi}}.\varpi\,.$$

23. Le théorème suivant mérite d'être remarqué; il concerne le produit $x!y!$ de deux facultés dans lesquelles la somme $x+y$ des exposans est un nombre entier quelconque, *pair* ou *impair*.

Dans le cas d'une somme *paire*, soient $x=a+h$, $y=a-h$, et par conséquent $x+y=2a$; la lettre a pourra alors désigner un nombre entier quelconque, et h une fraction moindre que l'unité. Cela posé, on a

$(a+h)!$

$$(a+h)!=(+h)!(1+h)^{a|1},$$
$$(a-h)!=(-h)!(1-h)^{a|1},$$

ou

$$(a+h)!=(+h)!(1+h)(2+h)(3+h)\ldots\ldots(a+h),$$
$$(a-h)!=(-h)!(1-h)(2-h)(3+h)\ldots\ldots(a-h);$$

on aura donc (16)

$$x!y!=\frac{h\pi}{\text{Sin.}h\pi}(1-h^2)(4-h^2)(9-h^2)\ldots\ldots(a^2-h^2).$$

Dans le cas d'une somme *impaire*, soient posés

$$x=a+\tfrac{1}{2}+h\;,\qquad y=a+\tfrac{1}{2}-h\;,$$

ce qui donnera

$$x+y=2a+1\;;$$

a pouvant désigner un nombre entier quelconque. On aura alors

$$x!=(a+\tfrac{1}{2}+h)!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{1}{2}+h)^{a|1},$$
$$y!=(a+\tfrac{1}{2}-h)!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{1}{2}-h)^{a|1},$$

ou

$$x!=(\tfrac{1}{2}+h)!(\tfrac{3}{2}+h)(\tfrac{5}{2}+h)(\tfrac{7}{2}+h)\ldots\ldots\left(\frac{2a+1}{2}+h\right),$$
$$y!=(\tfrac{1}{2}-h)!(\tfrac{3}{2}-h)(\tfrac{5}{2}-h)(\tfrac{7}{2}-h)\ldots\ldots\left(\frac{2a+1}{2}-h\right);$$

donc (22)

$$x!y!=\frac{\pi}{\text{Cos.}h\pi}(\tfrac{1}{4}-h^2)(\tfrac{9}{4}-h^2)(\tfrac{25}{4}-h^2)(\tfrac{49}{4}-h^2)\ldots\ldots\left\{\frac{(2a+1)^2}{4}-h^2\right\}.$$

Si, dans le cas de $x+y$ *pair*, h se change en ih, ce qui donnera toujours $x+y=2a$, a étant un nombre entier quelconque, il viendra

$$x!y!=\frac{2h\pi}{e^{h\pi}-e^{-h\pi}}(1+h^2)(4+h^2)(9+h^2)\ldots\ldots(a^2+h^2).$$

Si le même changement arrive, dans le cas de $x+y$ impair, en sorte

qu'on ait toujours $x+y=2a+1$, a étant un nombre entier quelconque, il viendra

$$x!y!=\frac{2\pi}{e^{h\pi}+e^{-h\pi}}\left(\tfrac{1}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{9}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{25}{4}+h^2\right)\left(\tfrac{49}{4}+h^2\right)\ldots\left\{\frac{(2a+1)^2}{4}+h^2\right\}.$$

24. L'analise que nous venons de développer n'est nullement bornée au cas proposé; et si l'on demandait soit la valeur du produit

$$\left\{1+\frac{x^n}{a^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+r)^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+2r)^n}\right\}\left\{1+\frac{x^n}{(a+3r)^n}\right\}\ldots,$$

soit celle du produit

$$\left\{1-\frac{x^n}{a^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+r)^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+2r)^n}\right\}\left\{1-\frac{x^n}{(a+3r)^n}\right\}\ldots,$$

continué à l'infini, on la trouverait encore, en suivant rigoureusement les mêmes principes.

25. Jusqu'ici nous avons supposé que les facteurs de nos factorielles constituaient toujours une progression arithmétique du *premier* ordre; c'est-à-dire, une progression ayant ses *premières* différences constantes; et ces sortes de fonctions peuvent être appelées *Factorielles du premier ordre*. On peut aussi imaginer une suite de facteurs constituant une progression arithmétique du *second* ordre; c'est-à-dire, une progression ayant ses *secondes* différences constantes, telle que

$$\begin{array}{l} a\,, \\ a+b\,, \\ a+2b+c\,, \\ a+3b+3c\,, \\ a+4b+6c\,, \\ a+5b+10c\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Le terme qui répondrait à l'indice n serait alors

$$a+\frac{n-1}{1}b+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-3}{2}c.$$

Un semblable produit pourrait être appelé *Factorielles du second ordre* ; et, pour peu qu'on suive le développement de la plupart de nos séries, on verra que ces factorielles, de même que celles des ordres supérieurs, c'est-à-dire, celles dans lesquelles se sont les différences d'un ordre plus élevé que le second, qui sont constantes, doivent se rencontrer très-fréquemment. Heureusement toutes ces factorielles sont réductibles à celles du premier ordre, moyennant une décomposition analitique fort simple. On peut toujours, en effet, pour le second ordre, déterminer les deux premiers termes A, A', et les deux premières différences r, r', de manière que le terme général

$$a+\frac{n-1}{1}b+\frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2}c;$$

devienne équivalent au produit

$$[A+(n-1)r][A'+(n-1)r'] ,$$

indépendamment de l'indice n. Il faudra, pour cela, résoudre les trois équations

$$AA'=a , \quad Ar'+A'r=b-\tfrac{1}{2}c , \quad rr'=\tfrac{1}{2}c ; \text{ (*)}$$

on aura alors

$$a=AA' ,$$
$$a+b=(A+r)(A'+r') ;$$
$$a+2b+c=(A+2r)(A'+2r') ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en sorte que la factorielle proposée du second ordre deviendra le simple produit

$$A^{n|r}\times A'^{n|r'}$$

(*) Les inconnues A, A', r, r' de ces trois équations étant au nombre de quatre, on pourra disposer de l'une d'elles pour rendre les valeurs des autres les plus simples possibles.

J. D. G.

de deux factorielles du premier ordre, et rentrera, comme telle, dans la théorie qui vient d'être développée. (*)

ANALISE TRANSCENDANTE.

Examen d'un cas singulier, qui nécessite quelques modifications dans la théorie des maxima *et des* minima *des fonctions de plusieurs variables;*

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



Soit

$$z=\varphi(x,y)\,,$$

et soient posés, pour abréger

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=p\;;\quad\left(\frac{dz}{dy}\right)=q\,,\quad\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=r\,,\quad\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=s\,,\quad\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=t.$$

Les conditions que l'on prescrit ordinairement, pour le *maximum* ou le *minimum* de la fonction z, sont

$$\left.\begin{array}{l}p=0\,,\\ q=0\,,\end{array}\right\}\;(1)\qquad rt-s^2>0\,;\quad(2)$$

(*) Ce que M. Kramp appelle ici *Factorielles de différens ordres* est ce que Vandermonde avait déjà appelé *Puissances de différens ordres*, avec cette différence seulement que les factorielles de l'ordre n sont des puissances de l'ordre $n+1$. Ainsi, suivant le langage de M. Kramp, les puissances du premier ordre, c'est-à-dire, les simples puissances que l'on considère dans les élémens, sont des factorielles de l'ordre *zéro*.

J. D. G.

ce qui assujettit r et t à être de mêmes signes ; et alors le *maximum* ou le *minimum* a lieu, suivant qu'on a $r<0$ ou $r>0$.

Je me propose ici de faire voir que la condition (2) exige trop; et que, pourvu que $rt-s^2$ ne soit pas négatif, cette quantité peut être nulle, sans que le *maximum* ou le *minimum* cesse d'avoir lieu.

La règle en usage pour la détermination des *maxima* et *minima* ne se rapporte qu'à des points *isolés* : elle est en défaut, lorsqu'il s'agit de déterminer une suite de points *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue. On se convaincra aisément de la vérité de ce que j'avance, par l'exemple suivant : si l'on fait tourner une ellipse autour d'une droite parallèle au grand axe, considérée comme axe des z, le sommet de l'ellipse décrira un cercle dont les coordonnées parallèles à l'axe des z seront évidemment des *maxima* ; cependant on trouve, pour ce cas (comme pour tous les cas semblables) $rt-s^2=0$. Je vais expliquer la raison de cette singularité, et compléter ainsi les conditions qui doivent indiquer l'existence des *maxima* et *minima*.

La première condition pour l'existence d'un *maximum* ou d'un *minimum* est d'avoir à la fois $p=0$, $q=0$; ces deux équations déterminent les coordonnées x, y, correspondant au *maximum* ou au *minimum* cherché, lorsqu'il ne s'agit que d'un ou de plusieurs points isolés. Mais, lorsqu'il doit y avoir une infinité de *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue, les deux équations $p=0$, $q=0$ doivent être de nature à être satisfaites en même temps, sans quoi il n'y aurait plus qu'un nombre limité de solutions ; il faut donc que ces deux équations aient lieu, par un facteur qui leur soit commun ; ainsi, on devra avoir

$$p=PF\ ,\qquad q=QF\ ; \qquad (3)$$

F étant le facteur commun qui, égalé à zéro, remplira à la fois les deux conditions (1); et P, Q, F pouvant être des fonctions quelconques de x et y.

L'équation qui déterminera les *maxima* et *minima* sera donc

$$F=0\ ; \qquad (4)$$

on tirera ensuite des équations (3), par la différentiation, en ayant égard à l'équation (4)

$$r=P\left(\frac{dF}{dx}\right),\ s=P\left(\frac{dF}{dy}\right),\ s=Q\left(\frac{dF}{dx}\right),\ t=Q\left(\frac{dF}{dy}\right); \qquad (5)$$

retranchant du produit des deux équations extrêmes le produit des deux autres, il viendra, en réduisant

$$rt-s^2=0\ ; \qquad (6)$$

la condition (2) ne sera donc pas satisfaite. Examinons si néanmoins, dans ce cas, le *maximum* ou le *minimum* ne pourrait pas avoir lieu.

Soient a, b des valeurs de x, y qui rendent z *maximum* ou *minimum*; et soient respectivement α, β des variations simultanées et très-petites de ces quantités, répondant à une valeur de z voisine de ce *maximum* ou *minimum*. A cause des équations (1), on aura simplement

$$z=\varphi(a+\alpha,b+\beta)=\varphi(a,b)+\tfrac{1}{2}(r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2)+\ldots\ldots \qquad (7)$$

Il faut pour le *maximum*, que cette quantité soit toujours plus petite que $\varphi(a,b)$ et pour le *minimum*, qu'elle soit toujours plus grande, quels que soient d'ailleurs les signes de α, β, pourvu que ces deux variations ne cessent pas d'être comprises dans des limites très-resserrées. On conclut facilement de là qu'il faut que la quantité

$$r\alpha^2+2\alpha s\beta+t\beta^2 \qquad (8)$$

conserve toujours le même signe négatif s'il s'agit du *maximum*, et positif s'il s'agit du *minimum*; et on démontre que la première condition est toujours satisfaite lorsqu'on a, à la fois

$$r<0\quad,\quad rt-s^2>0\ ;$$

et que la seconde l'est, si l'on a, au contraire,

$$r>0\quad,\quad rt-s^2>0.$$

Tout cela est parfaitement exact, et ces conditions sont en effet suffisantes pour que le *maximum* ou le *minimum* ait lieu; mais il

faut ajouter que, si elles sont *suffisantes*, elles ne sont pas néanmoins toujours *nécessaires*; et que la fonction (8) sera également de signe invariable, lorsqu'on aura simplement

$$rt-s^2=0\ ,$$

puisqu'alors elle se trouvera être un quarré, pris en *moins* ou en *plus*, suivant que r sera *négatif* ou *positif*.

On doit pourtant remarquer que, dans ce cas, la fonction (8) peut devenir nulle, pour des valeurs particulières de α et β; et il est même aisé de voir qu'elle sera nulle, en effet, lorsque ces deux variations seront liées entre elles par la relation

$$r\alpha+s\beta=0\ , \qquad (9)$$

équivalente alors à $s\alpha+t\beta=0$. On pourrait donc croire, d'après cela, que, lorsque l'équation (6) a lieu, les conditions, soit du *maximum* soit du *minimum*, cessent d'être satisfaites; mais il est aisé de se convaincre du contraire. Si, en effet, on élimine P entre les deux premières équations (5), il viendra

$$r\left(\frac{dF}{dy}\right)-s\left(\frac{dF}{dx}\right)=0\ ; \qquad (10)$$

équation qui, combinée avec l'équation (9), donnera

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\alpha+\left(\frac{dF}{dy}\right)\beta=0\ ; \qquad (11)$$

équation qui fait voir que α, β sont les coordonnées de la tangente à la courbe *maximum* ou *minimum*, et que, dans ce cas, z doit simplement se réduire à $\varphi(a,b)$. La fonction (8), en vertu de la condition (6) reste donc constamment positive, dans le cas du *minimum*, et négative, dans le cas du *maximum*, pour tous les points qui ne sont pas situés sur la courbe *minimum* ou *maximum*. Les *maxima* ou *minima* peuvent donc exister, quoique la condition (2) n'ait pas lieu; et la précédente analise prouve qu'il en est ainsi, en effet, pour une suite de *maxima* ou *minima*, formant une courbe continue.

Nous tirerons de tout cela les conclusions suivantes, savoir : 1.° que les conditions que l'on donne ordinairement pour celles des *maxima* et *minima* des surfaces courbes sont incomplettes, et ne peuvent donner que des points isolés jouissant de cette propriété ; 2.° que pour trouver une suite de *maxima* ou *minima*, liés entre eux par une courbe continue, il faut que p et q s'évanouissent, par un facteur commun ; 3.° que $rt-s^2=0$ est alors la condition nécessaire pour l'existence d'une courbe *maximum* ou *minimum* ; 4.° qu'enfin le cas que nous venons de considerer est un complément nécessaire à la théorie des *maxima* et *minima* des surfaces courbes (*)

Il ne serait pas difficile d'étendre cette théorie aux fonctions de trois ou d'un plus grand nombre de variables ; mais comme, pour chaque nouvelle variable, il y aurait une condition (2) de plus, il faudrait appliquer à chacune de ces conditions des raisonnemens analogues à ceux que nous avons faits sur la condition (2). De plus, la condition (1) serait composée d'autant d'équations qu'il y aurait de variables indépendantes. Supposons que ces équations soient

$$p_1=0\ ,\quad p_2=0\ ,\quad p_3=0\ ,\quad p_4=0\ ,\ldots\ldots \qquad (12)$$

(*) Il y a ici une distinction à établir. Si, suivant les notions admises jusqu'à présent, le caractère de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* est que les ordonnées environnantes soient *toutes plus petites* ou *toutes plus grandes* que celle-là, les ordonnées de la courbe considérée ici par M. Français ne seront point proprement des *maxima* ou *minima* ; mais si, comme il paraît plus convenable de le faire, on exige seulement de l'ordonnée *maximum* ou *minimum* qu'*aucune* des ordonnées environnantes ne soit *plus grande*, ou qu'*aucune* de ces ordonnées ne soit *plus petite* qu'elle, alors les ordonnées des différens points de la courbe *maximum* ou *minimum* deviendront, en effet, de véritables *maxima* ou *minima*.

Au surplus, quelque parti qu'on prenne à cet égard, la discussion dans laquelle s'est engagé M. Français, n'en conservera pas moins tout son intérêt.

Il convient peut-être de rappeler ici que, si la condition $rt-s^2=0$ ne se trouvait remplie que parce qu'en vertu de l'équation $F=0$, on aurait à la fois $r=0$, $s=0$, $t=0$; on ne pourrait alors rien prononcer sans avoir soumis à la discussion les coefficiens différentiels des ordres ultérieurs.

J. D. G.

elles

elles pourront être toutes essentiellement distinctes, auquel cas on n'aura qu'un certain nombre de *maxima* ou *minima* absolument déterminé ; ou bien elles pourront être rangées en plusieurs classes dont une seule renfermant des équations essentiellement distinctes, tandis que, dans chacune des autres, toutes les équations pourront être satisfaites par l'égalité à zéro d'un seul facteur qui leur sera commun. Il serait intéressant d'examiner l'influence de ces diverses circonstances sur les conditions analogues à la condition (2) ; ce serait alors seulement que la théorie des *maxima* et *minima*, dans les fonctions de plusieurs variables, pourrait être regardée comme complète.

ANALISE.

Remarque sur la résolution des équations du quatrième degré par la méthode de M. Wronski ;

Par M. Gergonne.



Dans l'examen que j'ai fait, à la page 51 de ce volume, de la méthode proposée par M. Wronski, pour la résolution générale des équations, j'ai insinué que cette méthode, ou plutôt la méthode plus simple que je lui ai substituée, cessait d'être applicable, dès le quatrième degré.

Cela est vrai, en effet, si l'on ne veut, pour faire disparaître les diverses fonctions de ρ, qu'employer seulement les deux équations

$$\rho^4-1=0\;;\quad 1+\rho+\rho^2+\rho^3=0\;,$$

comme on serait contraint de le faire, si 4 était un nombre pre-

mier; mais, comme l'équation $\rho^4-1=0$ équivaut à $(\rho^2-1)(\rho^2+1)=0$, et comme, d'après ce que j'ai prescrit sur le choix de ρ, on ne saurait avoir $\rho^2-1=0$, on doit avoir $\rho^2+1=0$; or, en ayant égard à cette relation, concurremment avec les premières, on parvient à faire évanouir toutes les fonctions de ρ, comme dans le troisième degré. Mais puisque, dès le quatrième degré, le procédé ne réussit que par cette circonstance particulière que ρ^4-1 est décomposable en deux facteurs rationnels ou, ce qui revient au même, que 4 est égal à 2.2, c'est un motif de plus pour douter du succès de l'application de cette méthode, dans les degrés supérieurs. Je vais indiquer brièvement la marche du calcul pour le quatrième degré, en réduisant tous les exposans de ρ à l'unité, en vertu de l'équation $\rho^2=-1$.

Soit la proposée

$$x^4+px^2+qx+r=0.$$

En posant

$$x_1=\tfrac{1}{4}\{+\rho\sqrt[4]{\xi_1}-\sqrt[4]{\xi_2}-\rho\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_2=\tfrac{1}{4}\{-\sqrt[4]{\xi_1}+\sqrt[4]{\xi_2}-\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_3=\tfrac{1}{4}\{-\rho\sqrt[4]{\xi_1}-\sqrt[4]{\xi_2}+\rho\sqrt[4]{\xi_3}\},$$
$$x_4=\tfrac{1}{4}\{+\sqrt[4]{\xi_1}+\sqrt[4]{\xi_2}+\sqrt[4]{\xi_3}\},$$

on aura

$$\xi_1=(-\rho x_1-x_2+\rho x_3+x_4)^4,$$
$$\xi_2=(-x_1+x_2-x_3+x_4)^4,$$
$$\xi_3=(+\rho x_1-x_2-\rho x_3+x_4)^4;$$

d'où on conclura, par la théorie des fonctions symétriques,

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=32(p^2+4r),$$
$$\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3=256\{(p^2-4r)^2+4pq^2\},$$
$$\xi_1\xi_2\xi_3=4096q^4;$$

ξ_1, ξ_2, ξ_3 seront donc les trois racines de la réduite

$$\xi^3-32(p^2+4r)\xi^2+256\{(p^2-4r)^2+4pq^2\}\xi-4096q^4=0.$$

Ces trois racines ne sont au surplus que les quarrés de celles de la réduite ordinaire

$$z^3+8pz^2+16(p^2-4r)z-64q^2=0\ ,$$

comme il est facile de s'en convaincre, et comme cela doit être en effet.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial,

Au Rédacteur des *Annales*;



Monsieur et cher Confrère,

Tout en rendant justice à l'élégance de l'analise qui a conduit M. F. M. à l'intégration des équations linéaires d'un ordre quelconque, à coefficiens constans, dans le cas des racines égales (page 46 de ce volume); qu'il me soit permis de faire observer à ce géomètre que j'ai, ainsi que lui, démontré cette formule, dans mon *Calcul intégral*, tome II, page 244 (*), indépendamment de toutes considérations tirées de la théorie des limites; et en évitant de faire disparaître la petite différence k que, dans tous les traités que connaît

(*) Traité élémentaire de calculs différentiel et intégral, indépendant de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites, etc. Deux vol. in-8.°, par J. B. E. du Bourguet, officier de l'université. Chez l'auteur, rue *St-Jacques*, n.° 121, et chez Madame veuve Courcier, quai des Augustins, n.° 57, à Paris.

M. F. M. l'on annulle, sans que les quantités ck, ck^2, ck^3,.... deviennent nulles en même temps; ce qui, comme l'observe avec raison M. F. M., embarrasse toujours les commençans. Ma formule (443), qui est la même que la seconde de la page 50 de ce volume, se déduit immédiatement de celle (426) qui est, en quelque sorte, la formule mère de cette théorie. (*)

Agréez, etc. (**)

Paris, le 12 d'août 1812.

QUESTION PROPOSÉE.

Problème d'analise indéterminée.

On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des trois derniers par la somme des deux du milieu, on obtienne un produit égal au cube d'un moyen arithmétique entre les deux premiers de ces quatre nombres.

(*) Indépendamment de l'ouvrage de M. du Bourguet, il existe un traité in-4.°, sur les *Équations linéaires*, dans lequel l'auteur, dont j'ai oublié le nom, expose une méthode qui lui est propre, et qui a principalement pour but d'éluder la difficulté que présente le cas des racines égales.

(**) A la page 59 de ce volume, on a oublié de faire mention d'une solution, sans démonstration, envoyée par M. du Bourguet.

J. D. G.

GÉOMÉTRIE.

Recherche de l'expression analitique de la surface convexe de l'onglet sphérique compris entre un grand cercle et un petit cercle, qui se coupent dans l'intérieur de la sphère;

Par M. Edelmann, élève de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



Soient un grand et un petit cercle, se coupant sous un angle connu quelconque, dans l'intérieur d'une sphère; soit conduit par le centre C de cette sphère (fig. 1) un plan perpendiculaire à la commune section de ces deux cercles, et conséquemment perpendiculaire à leurs plans. Soit AEBF le grand cercle qui forme la trace de ce plan sur la surface de la sphère. Soient de plus AB le diamètre du grand cercle donné, EF celui du petit cercle, et D leur commune section qui sera, en même temps, le point où le plan du grand cercle AEBF coupera la commune section des plans de ces deux cercles. Désignons enfin par D′ le point où cette commune section rencontre la partie antérieure de la surface sphérique, et dont le point D sera conséquemment la projection orthogonale sur le plan AEBF. Les deux cercles dont les diamètres sont AB et EF diviseront la sphère en quatre onglets, divisés eux-mêmes en deux parties égales par le cercle AEBF; et les surfaces convexes des demi-onglets compris dans l'hémisphère antérieur seront AD′E, ED′B,

BD′F, FD′A, formant ensemble la surface de cet hémisphère. Nous nous attacherons d'abord uniquement à déterminer la surface AD′E.

Les données du problème seront : r rayon de la sphère ; la distance $CD=a$; et l'angle $ADE=\lambda$, que les plans des deux cercles forment entre eux. En abaissant du centre C le rayon CG, perpendiculaire sur EF, et coupant cette corde en son milieu H, on aura $CH=a\,\text{Sin}.\lambda$; $GH=r-a\,\text{Sin}.\lambda$; et, en menant le rayon CE, on aura $\text{Sin}.CED=\dfrac{a\,\text{Sin}.\lambda}{r}$. Nous désignerons ce dernier angle par k.

La surface AD′E est (fig. 2) égale à la différence des deux surfaces ED′G et AD′G, dont la dernière AD′G est un triangle sphérique, rectangle en A. Les angles D′ et G de ce triangle se déterminent facilement par les deux formules $\text{Sin}.D'=\dfrac{\text{Cos}.\lambda}{\text{Cos}.k}$ et $\text{Cos}.G=\dfrac{\text{Tang}.k}{\text{Tang}.\lambda}$. La surface de ce triangle sera

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2\left\{\frac{D'+G}{90^\circ}-1\right\}.$$

L'autre surface ED′G, terminée par les deux arcs de grands cercles D′G, E′G, et par l'arc de petit cercle D′E, fait partie de la calotte sphérique, produite par la révolution de l'arc GE autour de l'axe CG, et dont la surface est $2\pi r(r-a\,\text{Sin}.\lambda)$. Cette surface devant être à celle de la calotte dans le rapport de l'angle G à quatre angles droits, on aura, pour la première,

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2.\frac{G(1-\text{Sin}\,k)}{90^\circ}.$$

On aura donc pour la surface AD′E

$$\tfrac{1}{2}\pi r^2.\frac{G(1-\text{Sin}.k)}{90^\circ}-\tfrac{1}{2}\pi r^2\left\{\frac{D'+G}{90^\circ}-1\right\}=\tfrac{1}{2}\pi r^2\left\{1-\frac{D'+G\,\text{Sin}.k}{90^\circ}\right\}.$$

En raisonnant de même sur les trois autres portions de l'hémisphère, on pourra former le tableau suivant :

$$\text{Surface AD'E}=\tfrac{1}{2}\pi r^2\left\{1-\frac{D'+G\,\text{Sin}.k}{90^\circ}\right\}.$$

$$\text{Surface ED'B} = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \left\{ 1 + \frac{D' + G\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

$$\text{Surface BD'F} = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \left\{ 1 - \frac{D' - (180^\circ - G)\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

$$\text{Surface FD'A} = \tfrac{1}{2}\pi r^2 \left\{ 1 + \frac{D' - (180^\circ - G)\,\text{Sin}.k}{90^\circ} \right\}.$$

On en déduit que la différence BD'E—AD'F ou BD'F—AD'E des surfaces convexes des deux demi-onglets diamétralement opposés est $\pi r^2\text{Sin}.k = \pi ar\text{Sin}.\lambda$; d'où il suit que la différence des surfaces convexes des deux onglets diamétralement opposés est $2\pi ra\text{Sin}.\lambda = \text{Cir}\,r \times \text{CH}$, c'est-à-dire, équivalente à la zone dont la hauteur serait CH.

A l'aide des formules qui viennent d'être construites, on déterminera facilement la portion de la surface sphérique interceptée entre trois ou un plus grand nombre d'arcs de petits cercles.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

De la génération de la parabole, par l'intersection de deux lignes droites; (*)

Par M. G. M. Raymond, principal du collége de Chambéri, membre de plusieurs Sociétés savantes et littéraires.

Soient IX, IY (fig. 3) deux droites perpendiculaires l'une à l'autre, prises, la première pour axe des x, et la seconde pour

(*) Voyez le mémoire inséré à la page 360 du second volume des *Annales*, auquel celui-ci fait suite.

axe des y. Soit F un point fixe pris sur IX, et soit Ff une droite mobile assujettie à passer constamment par ce point F. Soit Tt une autre droite mobile, coupant la première en M et la droite IX en T; soit menée l'ordonnée MP du point variable M. Supposons que le mouvement de Tt soit lié à celui de Ff autour du point fixe F, de manière qu'on ait constamment

$$\text{Ang.FMT}=\text{Ang.FTM}\ ,\quad \text{IP}=\text{IT}\ ;$$

et proposons-nous de déterminer le lieu géométrique de l'intersection M des deux droites Ff et Tt.

Posons IF$=c$; les équations des deux droites Tt et Ff seront de la forme

$$y=Ax+B\ , \qquad (1)$$

$$y=A'(x-c)\ ; \qquad (2)$$

on trouvera d'après cela

$$\text{IP}=\frac{B+A'c}{A'-A},\quad \text{IT}=-\frac{B}{A}\ ,\quad \text{Tang.FMT}=\frac{A'-A}{1+AA'}\ ;$$

or, suivant les conditions du problème, 1.° IP et IT doivent être égaux et de signes contraires; 2.° la tangente de l'angle FMT doit être égale à celle de l'angle FTM, c'est-à-dire, égale à A; ainsi on aura, entre les trois constantes A, A', B, les deux équations

$$\frac{B+A'c}{A'-A}=\frac{B}{A}\ ,\quad (3)\qquad \frac{A'-A}{1+AA'}=A\ ;\quad (4)$$

si donc, entre les équations (1), (2), (3), (4), on élimine les trois quantités A, A', B, l'équation résultante en x, y et c, sera celle de la courbe cherchée.

L'élimination s'exécute assez facilement comme il suit. D'abord en prenant le produit des équations (4) et (5), et exécutant toutes les réductions qui se présentent, on a

$$AB=c\ ; \qquad (5)$$

d'un autre côté, en chassant les dénominateurs dans l'équation (3), et ayant égard à l'équation (5), il vient

$$2c=A'(B-Ac)\ , \qquad (6)$$

éliminant A' entre cette dernière et l'équation (2), on a

$$2c(x-c)=y(B-Ac)\ ; \qquad (7)$$

l'équation (7), combinée avec l'équation (1), donne

$$A=\frac{y^2-2c(x-c)}{y(x+c)}\ , \quad B=c.\frac{y^2+2x(x-c)}{y(x+c)}\ ;$$

enfin, ces valeurs étant substituées dans l'équation (5), on obtient, toutes réductions faites,

$$\{y^2+(x-c)^2\}(y^2-4cx)=0.$$

L'égalité du premier facteur à zéro donnerait évidemment un point conjugué, situé en F; rejetant donc ce facteur, l'équation de la courbe décrite par le point M sera

$$y^2=4cx\ ;$$

c'est-à-dire, que cette courbe sera une parabole, ayant le point I pour sommet et le point F pour foyer.

Soit porté IF sur le prolongement de IP de I en G; par le point G soit menée une parallèle GH à IY, et soit enfin abaissée, du point M, une perpendiculaire MQ sur cette parallèle; à cause des angles égaux FMT et FTM, et de IT=IP, on aura

$$MF=FT=FI+IT=IG+IP=PG=MQ\ ,$$

ainsi chaque point M de la courbe est à une même distance de la droite GH et du point F.

L'inclinaison de la droite T*t* étant donnée, il ne peut y avoir qu'une seule direction de FM pour laquelle la condition Ang.FMT =Ang.FTM soit satisfaite; donc la droite T*t* n'a que le seul point M de commun avec la courbe et lui est conséquemment tangente

en ce point ; et, comme on a, par construction, Ang.FMT=Ang.FTM =Ang.QMT, il en faut conclure que, dans la parabole, *la tangente en un point divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur et le prolongement d'une parallèle à l'axe menés par ce même point*; enfin, de ce que IT=IP, on voit que, dans la parabole, *la sous-tangente* est *double de l'abscisse.*

Nous venons de voir qu'on a constamment MQ=MF et Ang.FMT =Ang.FQT ; si donc l'angle MFT est droit ou, ce qui revient au même, si le point P coïncide avec le point I, le quadrilatère GQMF deviendra un quarré ; et MT, qui en sera la diagonale, viendra passer par le point G ; on aura donc alors FM=FG=2FI ; ainsi, dans la parabole, *l'ordonnée qui répond au foyer est double de la distance de ce foyer au sommet*; *la tangente à l'extrémité de cette ordonnée fait un angle demi-droit avec elle, et passe par l'intersection de l'axe de la courbe avec sa directrice.* Cette dernière propriété de la parabole lui est commune, au surplus, avec l'ellipse et l'hyperbole.

D'après ce qui précède, en désignant par x' et y' les coordonnées du point M, l'équation de la tangente en ce point sera

$$y-y'=A(x-x')\ ,$$

ou

$$y-y'=\frac{y'^2-2c(x'-c)}{y'(x'+c)}(x-x')\ ,$$

ou, en mettant pour y'^2 sa valeur $4cx'$ et réduisant,

$$y-y'=\frac{2c}{y'}(x-x')\ ;$$

l'équation de toute corde parallèle à cette tangente sera donc de la forme

$$y=\frac{2c}{y'}x+D.$$

On obtiendra les coordonnées des extrémités de cette corde, en

combinant cette dernière équation avec l'équation

$$y^2=4cx.$$

L'élimination de x entre ces deux équations donne

$$y^2-2y'y+Dy'=0\ ;$$

la somme des ordonnées des extrémités de la corde dont il s'agit est donc $2y'$; la moitié de cette somme, c'est-à-dire, l'ordonnée du milieu de la corde est donc $y'=MP$; cette corde a donc son milieu sur le prolongement ME de la parallèle MQ menée à l'axe par le point M. Ainsi, dans la parabole, *toute parallèle à l'axe est un diamètre de la courbe.*

Ce qui précède, et ce qui a déjà été dit dans l'article auquel celui-ci fait suite, paraît très-propre à faire voir combien le choix des constructions, dans la génération des courbes, peut influer sur la déduction, plus ou moins facile et lumineuse, de leurs diverses propriétés.

Chambéry, 12 février 1812.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

Méthode générale pour former les valeurs des inconnues, dans les problèmes indéterminés du premier degré; quels que soient d'ailleurs et le nombre de ces inconnues et celui des équations établies entre elles;

Par M. GERGONNE.

LE problème général de l'analise indéterminée est celui-ci : *Étant données, entre des inconnues, des équations, en moindre nombre*

qu'elles, sans radicaux ni dénominateurs ; trouver pour ces inconnues les valeurs entières et rationnelles les plus générales qui puissent satisfaire aux équations proposées ?

Pour que les valeurs qu'on attribuera à ces inconnues puissent être réputées *exactes*, *il suffit* évidemment que ces valeurs, substituées dans les équations proposées, rendent ces équations identiques; pour que ces mêmes valeurs soient réputées *complettes*, il est *nécessaire* qu'elles soient fonctions d'autant de nouvelles indéterminées, au moins, qu'il y a d'inconnues au-delà du nombre des équations à résoudre, et que ces indéterminées ne puissent être réduites à un moindre nombre d'autres indéterminées, fonctions de celles-là.

Les équations proposées doivent, en effet, être considérées comme le résultat de l'élimination, entre les valeurs des inconnues, des indéterminées dont ces valeurs sont fonctions. Or, si ces valeurs étaient fonctions de moins d'indéterminées qu'il n'y a d'inconnues au-delà du nombre des équations ; en éliminant ces indéterminées entre elles, on obtiendrait, outre les équations proposées, d'autres équations auxquelles les valeurs des inconnues satisferaient également ; on se trouverait donc avoir assujetti ces inconnues à des conditions étrangères à celles de la question proposée ; les valeurs trouvées n'auraient donc pas toute la latitude d'indétermination comportée par cette question.

J'ai dit que les valeurs des inconnues *devaient* être fonctions d'autant d'indéterminées distinctes, *au moins*, qu'il y avait d'inconnues au-delà du nombre des équations à résoudre ; et c'est qu'en effet rien ne s'oppose à ce que ces indéterminées soient en plus grand nombre. L'essentiel étant uniquement que les indéterminées puissent être éliminées, entre les valeurs des inconnues, et que de leur élimination résultent seulement les équations proposées et point d'autres: on conçoit que ces indéterminées, quelque nombreuses qu'elles soient d'ailleurs, peuvent être tellement combinées, dans les valeurs des inconnues, que l'élimination d'un certain nombre d'entre elles fasse disparaître toutes les autres. Leur nombre peut donc fort bien excéder celui que semblerait comporter, en général, le nombre des valeurs

valeurs entre lesquelles elles doivent être éliminées, et celui des équations qui doivent résulter de leur élimination.

C'est sans doute pour n'avoir pas fait cette observation qu'on n'a pu, jusqu'ici, dans le premier degré, construire des formules générales que pour le seul cas où le nombre des inconnues surpasse d'une unité celui des équations. Il arrive, en effet, dans les autres cas, que, si l'on n'admet, dans les valeurs des inconnues, qu'autant d'indéterminées qu'il y a de ces inconnues au-delà du nombre des équations du problème, les coefficiens qui devront affecter ces indéterminées, dépendant des valeurs numériques des coefficiens des équations proposées, ne pourront être assignés que dans chaque cas particulier, et ne pourront être exprimés sous une forme générale, tandis qu'ils deviendront exprimables sous une telle forme, et même d'une manière très-régulière et très-symétrique, du moment qu'on voudra admettre un plus grand nombre de ces indéterminées.

Il ne faudrait pas croire cependant que, par cela seul que les valeurs des inconnues sont fonction d'autant d'indéterminées ou même de plus d'indéterminées qu'il y a d'inconnues au-delà du nombre des équations, ces valeurs doivent être réputées complètes ; puisqu'il pourrait se faire, comme je l'ai déjà remarqué, que, par l'élimination de quelques-unes de ces indéterminées, les autres disparussent d'elles-mêmes, sans faire parvenir à toutes les équations du problème.

Le but que je me propose ici est d'appliquer ces réflexions à la résolution générale d'un nombre quelconque d'équations entre un plus grand nombre d'inconnues.

Soient

$$\left.\begin{array}{l} at+bu+cv+dx+\ldots=k\,, \\ a't+b'u+c'v+d'x+\ldots=k'\,, \\ a''t+b''u+c''v+d''x+\ldots=k''\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

n équations entre les m inconnues t, u, v, x, ...; m étant supposé plus grand que n, et tous les coefficiens étant supposés entiers.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, ces équations seraient complètement résolues, si l'on trouvait, pour les inconnues qu'elles renferment des valeurs de cette forme

$$\left.\begin{array}{l} t=T+A\alpha+A'\beta+A''\gamma+A'''\delta+\ldots\ldots, \\ u=U+B\alpha+B'\beta+B''\gamma+B'''\delta+\ldots\ldots, \\ v=V+C\alpha+C'\beta+C''\gamma+C'''\delta+\ldots\ldots, \\ x=X+D\alpha+D'\beta+D''\gamma+D'''\delta+\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right\} \quad (2)$$

α, β, γ, δ, ... étant des indéterminées, au nombre de $m-n$, au moins; et $T, U, V, X, \ldots, A, B, C, D, \ldots, A', B', C, D', \ldots, A'', B'', C'', D'', \ldots\ldots, A''', B''', C''', D''', \ldots\ldots$, étant des fonctions entières des coefficiens des équations (1).

La substitution de ces valeurs, dans les équations (1) donne

$$\left.\begin{array}{l} aT+bU+cV+dX+\ldots\ldots \\ +(aA+bB+cC+dD+\ldots)\alpha \\ +(aA'+bB'+cC'+dD'+\ldots)\beta \\ +(aA''+bB''+cC''+dD''+\ldots)\gamma \\ +(aA'''+bB'''+cC'''+dD'''+\ldots)\delta \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} =k,$$

$$\left.\begin{array}{l} a'T+b'U+c'V+d'X+\ldots\ldots \\ +(a'A+b'B+c'C+d'D+\ldots\ldots)\alpha \\ +(a'A'+b'B'+c'C'+d'D'+\ldots\ldots)\beta \\ +(a'A''+b'B''+c'C''+d'D''+\ldots\ldots)\gamma \\ +(a'A'''+b'B'''+c'C'''+d'D'''+\ldots\ldots)\delta \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=k',$$

$$\left.\begin{array}{l} a''T+b''U+c''V+d''X+\ldots\ldots \\ +(a''A+b''B+c''C+d''D+\ldots\ldots)\alpha \\ +(a''A'+b''B'+c''C'+d''D'+\ldots\ldots)\beta \\ +(a''A''+b''B''+c''C''+d''D''+\ldots\ldots)\gamma \\ +(a''A'''+b''B'''+c''C'''+d''D'''+\ldots\ldots)\delta \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}=k'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Afin donc que α, β, γ, ... demeurent indéterminées, on devra avoir les divers groupes d'équations que voici.

$$\left.\begin{array}{l} a\,T+b\,U+c\,V+d\,X+\ldots\ldots=k\,, \\ a'\,T+b'\,U+c'\,V+d'\,X+\ldots\ldots=k'\,, \\ a''T+b''U+c''V+d''X+\ldots\ldots=k''\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\}\quad(3)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,A+b\,B+c\,C+d\,D+\ldots\ldots=0\,, \\ a'A+b'B+c'C+d'D+\ldots\ldots=0\,, \\ a''A+b''B+c''C+d''D+\ldots\ldots=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\}(4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,A'+b\,B'+c\,C'+d\,D'+\ldots\ldots=0\,, \\ a'A'+b'B'+c'C'+d'D'+\ldots\ldots=0\,, \\ a''A'+b''B'+c''C'+d''D'+\ldots\ldots=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\}(5)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,A''+b\,B''+c\,C''+d\,D''+\ldots\ldots=0\,, \\ a'A''+b'B''+c'C''+d'D''+\ldots\ldots=0\,, \\ a''A''+b''B''+c''C''+d''D''+\ldots\ldots=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\}(6)$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,A'''+b\,B'''+c\,C'''+d\,D'''+\ldots\ldots=0\,, \\ a'A'''+b'B'''+c'C'''+d'D'''+\ldots\ldots=0\,, \\ a''A'''+b''B'''+c''C'''+d''D'''+\ldots\ldots=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,; \end{array}\right\}(7)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et réciproquement, si $T, U, V, X, \ldots, A, B, C, D, \ldots, A', B', C', D', \ldots, A'', B'', C'', D'', \ldots, A''', B''', C''', D''', \ldots\ldots$, sont tels que ces équations aient lieu, les valeurs (2) seront la solution complète des équations (1).

Le groupe (3) prouve que $T, U, V, X, \ldots$ peuvent et doivent être des nombres quelconques, satisfaisant aux équations (1). Les

groupes suivans prouvent que $A, B, C, D, \ldots$, que $A', B', C', D', \ldots$ que $A'', B'', C'', D'', \ldots$, que A''', B''', C''', D'''', ..., doivent satisfaire aux mêmes équations, privées de leurs derniers termes, et ne doivent renfermer conséquemment aucune des quantités k, k', k'', ... Je m'occuperai uniquement de la recherche de $A, B, C, D, \ldots, A', B', C', D', \ldots, A'', B'', C'', D'', \ldots, A''', B''', C''', D''', \ldots$, d'autant que la détermination de T, U, V, X, ..., ne peut avoir lieu que pour des cas particuliers, et que la manière d'y procéder est connue.

La recherche des quantités $A, B, C, D, \ldots, A', B', C', D', \ldots, A'', B'', C'', D'', \ldots, A''', B''', C''', D''', \ldots$, se réduit évidemment à celle d'une suite de fonctions des coefficiens des premiers membres des équations (1) qui soient toutes nulles d'elles-mêmes, et qui, en outre, puissent être mises successivement sous les diverses formes qu'affectent les premiers membres des équations (4), (5), (6), (7), ... Or, c'est ce à quoi on peut parvenir facilement, à l'aide des observations présentées, pour la première fois, par M. Bezout, dans sa *Théorie des équations algébriques*, page 181, et développées postérieurement, d'une manière plus générale et plus lumineuse, par M. Laplace, dans les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1772, page 294.

En vertu de ces observations, les fonctions cherchées sont 1.° dans le cas d'une équation unique

$$
\begin{array}{l}
ba-ab+oc+od+\ldots=o\,, \\
ca+ob-ac+od+\ldots=o\,, \\
oa+cb-bc+od+\ldots=o\,, \\
da+ob+oc-ad+\ldots=o\,, \\
oa+db+oc-bd+\ldots=o\,, \\
oa+ob+dc-cd+\ldots=o\,, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{array}
$$

2.° dans le cas de deux équations

$$(bc'-cb')a-(ac'-ca')b+(ab'-ba')c+0d+\ldots\ldots=0\,,$$
$$(bd'-db')a-(ad'-da')b+0c+(ab'-ba')d+\ldots\ldots=0\,,$$
$$(cd'-d'c')a+0b-(ad'-da')c+(ac'-ca')d+\ldots\ldots=0\,,$$
$$0a+(cd'-dc')b-(bd'-db')c+(bc'-cb')d+\ldots\ldots=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$
$$(bc'-cb')a'-(ac'-ca')b'+(ab'-ba')c'+0d'+\ldots\ldots=0\,,$$
$$(bd'-db')a'-(ad'-da')b'+0c'+(ab'-ba')d'+\ldots\ldots=0\,,$$
$$(cd'-dc')a'+0b'-(ad'-da')c'+(ac'-ca')d'+\ldots\ldots=0\,,$$
$$0a'+(cd'-dc')b'-(bd'-db')c'+(bc'-cb')d'+\ldots\ldots=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

3.° dans le cas de trois équations

$$\left.\begin{array}{l}(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')a\\-(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')b\\+(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')c\\-(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')d\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left.\begin{array}{l}(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')a'\\-(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')b'\\+(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')c'\\-(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')d'\\+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')a'' \\ -(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')b'' \\ +(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')c'' \\ -(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')d'' \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}=0\ ,$$

et ainsi de suite.

Ainsi, 1.° dans le cas d'une équation unique, il faudra poser

$$\begin{array}{llll}A\ =b\ , & B=-a\ , & C\ =0\ , & D\ =0\ ,\ldots. \\ A'\ =c\ , & B'\ =0\ , & C'\ =-a\ , & D'\ =0\ ,\ldots. \\ A''\ =0\ , & B''=c\ , & C''\ =-b\ , & D''\ =0\ ,\ldots. \\ A'''=d\ , & B'''=0\ , & C'''=0\ , & D'''=-a\ ,\ldots. \\ A''''=0\ , & B''''=d\ , & C''''=0\ , & D''''=-b\ ,\ldots. \\ A'''''=0\ , & B'''''=0\ , & C'''''=d\ , & D'''''=-c\ ,\ldots. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\end{array}$$

2.° dans le cas de deux équations, on posera

$$\begin{array}{lllll}A=(bc'-cb')\ , & B=-(ac'-ca')\ , & C=(ab'-ba')\ , & D=0 & ,\ldots. \\ A'=(bd'-db')\ , & B'=-(ad'-da')\ , & C'=0 & ,\ D'=(ab'-ba') & ,\ldots. \\ A''=(cd'-dc')\ , & B''=0 & ,\ C''=-(ad'-da')\ , & D''=(ac'-ca') & ,\ldots. \\ A'''=0 & ,\ B'''=(cd'-dc')\ , & C'''=-(bd'-db')\ , & D'''=(bc'-cb') & ,\ldots. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \end{array}$$

3.° dans le cas de trois équations on posera

$$\begin{array}{l}A=(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')\ ,\ldots. \\ B=-(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')\ ,\ldots. \\ C=(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')\ ,\ldots. \\ D=-(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\ ,\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

et ainsi de suite.

Ainsi, 1.° dans le cas d'une équation unique, si l'équation proposée est

$$at+bu=k\ ,$$

les formules résolvantes seront

$$t=T+b\alpha\ ,$$
$$u=U-a\alpha\ .$$

Si l'équation proposée est

$$at+bu+cv=k\ ,$$

les formules résolvantes seront

$$t=T+b\alpha+c\beta\ ,$$
$$u=U-a\alpha+c\gamma\ ,$$
$$v=V-a\beta-b\gamma\ .$$

si l'équation proposée est

$$at+bu+cv+dx=k\ ;$$

les formules résolvantes seront

$$t=T+b\alpha+c\beta+d\delta\ ,$$
$$u=U-a\alpha+c\gamma+d\iota\ ,$$
$$v=V-a\beta-b\gamma+d\zeta\ ,$$
$$x=X-a\delta-b\iota-c\zeta\ .$$

Et ainsi de suite.

2.° Dans le cas de deux équations, si les équations proposées sont

$$a\,t+b\,u+c\,v=k\ ,$$
$$a't+b'u+c'v=k'\ ;$$

les formules résolvantes seront

$$t=T+(bc'-cb')\alpha\ ,$$
$$u=U-(ac'-ca')\alpha\ ,$$
$$v=V+(ab'-ba')\alpha\ ,$$

Si les équations proposées sont

$$a\,t+b\,u+c\,v+d\,x=k\ ,$$
$$a't+b'u+c'v+d'x=k'\ ,$$

les

les formules résolvantes seront

$$t=T+(bc'-cb')\alpha+(bd'-db')\beta+(cd'-dc')\gamma\ ;$$
$$u=U-(ac'-ca')\alpha-(ad'-da')\beta+(cd'-dc')\delta\ ,$$
$$v=V+(ab'-ba')\alpha-(ad'-da')\gamma-(bd'-db')\delta\ ,$$
$$x=X+(ab'-ba')\beta+(ac'-ca')\gamma+(bc'-cb')\delta\ .$$

Et ainsi de suite.

3.° Dans le cas de trois équations, si les équations proposées sont

$$a\,t+b\,u+c\,v+d\,x=k\ ,$$
$$a'\,t+b'\,u+c'\,v+d'\,x=k'\ ,$$
$$a''t+b''u+c''v+d''x=k''\ ,$$

les formules résolvantes seront

$$t=T+(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')\alpha\ ,$$
$$u=U-(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')\alpha\ ,$$
$$v=V+(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')\alpha\ ,$$
$$x=X-(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\alpha\ .$$

et ainsi de suite.

Il est aisé de déduire de cette théorie qu'en général, m étant le nombre des inconnues et n le nombre des équations, le nombre des indéterminées dont les valeurs de ces inconnues devront être fonctions, sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{m-n+1}{n}\cdot\frac{m-n}{n+1}\ ;$$

et que, dans la valeur de chacune des inconnues, il n'en entrera qu'un nombre

$$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{m-n}{n}\ ;$$

en sorte que chacune de ces indéterminées n'entrera, à son tour, que dans les valeurs de $n+1$ inconnues seulement.

Si les termes connus k, k', k'',.... des équations proposées sont tous nuls, on pourra aussi supposer que T, U, V, X,.... sont nuls; et alors ces équations seront susceptibles d'une résolution

absolument générale, ce qui peut être précieux dans un grand nombre de recherches analitiques.

Il serait intéressant de voir si, avec des modifications convenables, ce procedé ne pourrait pas être étendu aux équations indeterminées des degrés supérieurs au premier.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie du génie,

Au Rédacteur des *Annales*;

Présentant la solution analitique complète du problème où il s'agit de déterminer une sphère qui touche quatre sphères données.



Monsieur,

M. Poisson vient de publier, dans le *Bulletin des sciences de la société philomatique* (*), une solution analitique du problème de la sphère qui touche quatre sphères données. J'en ai publié une aussi, il y a près de trois ans, dans la *Correspondance sur l'école polythecnique* (**). A la vérité cette solution, telle qu'elle est, ne suffit pas pour déterminer *analitiquement* les coordonnées du centre et le rayon de la sphère cherchée, que j'enseigne à déterminer *géométriquement* dans mon mémoire; mais il faut très-peu ajouter à ma solution, pour achever de la rendre complète, sous le point de vue analitique, comme on en pourra juger par ce qui suit.

Soient r, r', r'', r''', les rayons des quatre sphères données, et $2a$, $2b$, $2c$ les distances respectives du centre de la première aux centres des trois autres; soient de plus R le rayon de la sphère cherchée, et ρ, ρ', ρ'',

(*) Tome III, n.° 60, septembre 1812, page 141.

(**) Tome II, n.° 2, janvier 1810, page 63.

ρ''' les distances de son centre à ceux des quatre sphères données. Cela posé, on aura

$$R\mp r=\rho\ ,\quad R\mp r'=\rho'\ ,\quad R\mp r''=\rho''\ ,\quad R\mp r'''=\rho'''. \qquad (1)$$

Ces quatre équations, avec leurs doubles signes, fournissent seize combinaisons différentes, qui correspondent à autant de solutions du problème. Nous nous bornerons au cas des signes supérieurs, attendu que les autres peuvent se traiter de la même manière.

En retranchant la première de ces équations de chacune des trois autres, et posant, pour abréger,

$$r-r'=2d\ ,\quad r-r''=2d'\ ,\quad r-r'''=2d''\ ,$$

il vient $\rho'=\rho+2d\ ,\quad \rho''=\rho+2d'\ ,\quad \rho'''=\rho+2d''. \qquad (2)$

Mais on a d'un autre côté

$$\left.\begin{array}{l}\rho'^2=\rho^2+4a^2-4a\rho\text{Cos.}(\rho,a)\ ,\\ \rho''^2=\rho^2+4b^2-4b\rho\text{Cos.}(\rho,b)\ ,\\ \rho'''^2=\rho^2+4c^2-4c\rho\text{Cos.}(\rho,c)\ .\end{array}\right\}(3)$$

Egalant ces valeurs aux quarrés des équations (2), on trouve

$$\left.\begin{array}{l}\rho\{a\text{Cos.}(\rho,a)+d\ \}=a^2-d^2\ ,\\ \rho\{b\text{Cos.}(\rho,b)+d'\}=b^2-d'^2\ ,\\ \rho\{c\text{Cos.}(\rho,c)+d''\}=c^2-d''^2\ .\end{array}\right\}(4)$$

Si, entre ces trois équations, on élimine ρ, on obtient les trois équations suivantes, dont une quelconque est une suite des deux autres.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{b^2-d'^2}{b}\right)\text{Cos.}(\rho,a)-\left(\dfrac{a^2-d^2}{a}\right)\text{Cos.}(\rho,b)=\dfrac{d'}{b}\left(\dfrac{a^2-d^2}{a}\right)-\dfrac{d}{a}\left(\dfrac{b^2-d'^2}{b}\right)\ ,\\ \left(\dfrac{c^2-d''^2}{c}\right)\text{Cos.}(\rho,b)-\left(\dfrac{b^2-d'^2}{b}\right)\text{Cos.}(\rho,c)=\dfrac{d''}{c}\left(\dfrac{b^2-d'^2}{b}\right)-\dfrac{d'}{b}\left(\dfrac{c^2-d''^2}{c}\right)\ ,\\ \left(\dfrac{a^2-d^2}{a}\right)\text{Cos.}(\rho,c)-\left(\dfrac{c^2-d''^2}{c}\right)\text{Cos.}(\rho,a)=\dfrac{d}{a}\left(\dfrac{c^2-d''^2}{c}\right)-\dfrac{d''}{c}\left(\dfrac{a^2-d^2}{a}\right)\ .\end{array}\right\}(5)$$

Tout ceci suffit, pour la construction géométrique du problème, comme je l'ai fait voir en l'endroit cité de la *Correspondance*. En y ajoutant la relation qui existe entre les angles que la droite ρ fait avec les

droites a, b, c; relation que j'ai aussi donnée dans la même *Correspondance* (*), on a tout ce qu'il faut pour déterminer analitiquement les coordonnées du centre de la sphère cherchée, ainsi que son rayon.

Cette relation est

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{Cos.}^2(\rho\,,a)}{\text{Sin.}^2(a\,,bc)}-2\dfrac{\text{Cos.}(\rho\,,b)\text{Cos.}(\rho\,,c)}{\text{Sin.}(b\,,ac)\text{Sin.}(c\,,ab)}\text{Cos.}(ab\,,ac)\\ +\dfrac{\text{Cos.}^2(\rho\,,b)}{\text{Sin.}^2(b\,,ac)}-2\dfrac{\text{Cos.}(\rho\,,a)\text{Cos.}(\rho\,,c)}{\text{Sin.}(a\,,bc)\text{Sin.}(c\,,ab)}\text{Cos.}(ab\,,bc)\\ +\dfrac{\text{Cos.}^2(\rho\,,c)}{\text{Sin.}^2(c\,,ab)}-2\dfrac{\text{Cos.}(\rho\,,a)\text{Cos.}(\rho\,,b)}{\text{Sin.}(a\,,bc)\text{Sin.}(b\,,ac)}\text{Cos.}(ac\,,bc)\end{array}\right\}=1. \qquad (6)$$

En éliminant de cette équation, au moyen des équations du premier degré (5), deux des trois quantités Cos.$(\rho\,,a)$, Cos.$(\rho\,,b)$, Cos.$(\rho\,,c)$, la troisième sera donnée par une équation du second degré; et les deux autres seront données ensuite par les mêmes équations (5). Il ne restera donc plus à déterminer que la valeur de ρ, qui sera fournie par une quelconque des équations (4), du premier degré.

La solution du problème est donc complète, et (et je crois) la plus simple possible.

N. B. On trouve deux solutions, pour la position de ρ, parce que les équations (2) sont les mêmes, aux signes près, soit qu'on prenne tous les signes supérieurs dans les équations (1), soit qu'on y prenne tous les signes inférieurs. Mais, comme nous n'avons employé que les quarrés des équations (2) qui comprennent l'un et l'autre signes, il s'ensuit que nous avons dû obtenir la solution des deux cas.

Agréez, etc.

Metz, le 2 octobre 1812.

Remarque du Rédacteur.

On sait que le traité de Viète sur le *Contact des cercles* contient *dix* problèmes, et que celui de Fermat sur le *Contact des sphères* en renferme *quinze.* On sait, de plus que le dernier des problèmes de Viète est celui où il s'agit de *décrire un cercle qui touche trois*

(*) Voyez tome I, n.° 9, janvier 1808, page 343, équation (24).

cercles donnés.; et que le dernier de ceux de Fermat est celui où il s'agit de *décrire une sphère qui touche quatre sphères données.* On sait enfin que Viète et Fermat résolvent leur dernier problème, en le ramenant à l'un des précédens, lequel ne peut lui-même être résolu qu'à l'aide de l'un de ceux qui le précèdent, et ainsi de suite ; ce qui, pour le dire en passant, rend la solution effective du dernier problème beaucoup plus compliquée qu'elle ne le paraît au premier abord.

On peut, en employant l'analise, suivre une marche tout à fait inverse, et tirer au contraire de la solution du dernier problème, soit de Viète soit de Fermat, la solution de tous ceux qui le précèdent.

Il est aisé de voir, en effet, que, dans tous ces problèmes, la question peut se réduire à trouver le rayon soit du cercle soit de la sphère cherchée. Concevons donc que l'on ait obtenu l'expression analitique du rayon de ce cercle ou de cette sphère, et que l'on ait pris pour données les rayons des cercles ou des sphères données, et les plus courtes distances de leurs circonférences ou surfaces, considérées deux à deux. Si, dans cette expression, on suppose un ou plusieurs rayons nuls ou infinis, les cercles ou sphères auxquels ils appartiendront, deviendront aussitôt des points dans le premier cas, et des droites ou des plans dans le second. En faisant donc toutes les combinaisons possibles de ces deux sortes de suppositions, on parviendra à déduire d'une formule unique, celles qui conviennent à tous les cas.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations du théorème énoncé à la page 384 du deuxième volume des Annales.

Première solution ;

Par M. PESCHIER, inspecteur et professeur de philosophie à l'académie impériale de Genève.

ÉNONCÉ. *Si à une ellipse on circonscrit un quadrilatère quel-*

conque, le point d'intersection des deux droites qui joindront les points de contact de l'ellipse avec les côtés opposés de ce quadrilatère, coïncidera avec le point d'intersection de ses deux diagonales.

Comme toute ellipse est la projection orthogonale d'un cercle, sur un plan non parallèle à celui d'un cercle, et que, dans cette espèce de projection, les points d'intersection et de contingence sont les projections des points d'intersection et de contingence de la figure projetée; et les droites qui les joignent, projections de celles qui joignent les points correspondans de cette figure; il suffira, pour établir le théorème, par rapport à l'ellipse, de l'avoir démontré dans le cercle.

LEMME. Un angle quelconque, aigu ou obtus étant donné, il peut toujours être divisé en deux parties dont les sinus aient entre eux un rapport donné; et il ne peut être ainsi divisé que d'une manière unique.

Cela est évident, lorsque les deux parties de l'angle sont des angles aigus; et, quand l'une d'elles est un angle obtus, on démontrera que les parties dont les sinus ont le rapport assigné ne peuvent varier, sans que le rapport des sinus ne varie aussi; mais une construction simple et facile démontre à la fois la possibilité et l'unité de division de l'angle, suivant la condition demandée.

Soit donc ACB (fig. 4 et 5) un angle quelconque, partagé en deux parties par le rayon CD=CA=CB; soit tirée AB, coupant CD en M, et soient menés les sinus respectifs AP, BQ des angles ACD, BCD; la similitude des triangles MAP, MBQ donnera

$$AP:BQ, \text{ ou } Sin.ACD:Sin.BCD::AM:BM\ ;$$

or, AB peut toujours être divisée de façon que le rapport de AM à BM soit un rapport donné, et ne peut l'être que d'une seule manière; donc l'angle ACB peut toujours être divisé en sorte que les sinus de ses parties soient en rapport donné, et ne peut l'être que d'une manière unique.

Démonstration du theorème. Soit C (fig. 6) le centre d'un cercle ABDE auquel soit circonscrit un quadrilatère FGHK, de telle

sorte que A, B, D, E soient respectivement les points de contact du cercle avec ses côtés FG, GH, HK, KF. Soient tirées les cordes AD, BE, joignant les points de contact opposés (ou alternatifs) A et D, B et E, lesquelles se coupent en O; enfin, de ce point O soient menées à deux sommets alternatifs quelconques F, H du quadrilatère circonscrit, les droites OF, OH; je dis que ces deux droites n'en feront qu'une.

En effet,

$$\text{dans les triangles} \left\{ \begin{array}{l} OBH \\ ODH \end{array} \right\} \text{on a} \left\{ \begin{array}{l} OH:BH::Sin.OBH:Sin.BOH\,, \\ OH:DH::Sin.ODH:Sin.DOH\,; \end{array} \right.$$

mais BH=DH; donc

$$Sin.OBH:Sin.ODH::Sin.BOH:Sin.DOH.$$

Pareillement,

$$\text{dans les triangles} \left\{ \begin{array}{l} OEF \\ OAF \end{array} \right\} \text{on a} \left\{ \begin{array}{l} OF:EF::Sin.OEF:Sin.EOF\,, \\ OF:AF::Sin.OAF:Sin.AOF\,; \end{array} \right.$$

mais EF=AF; donc

$$Sin.OEF:Sin.OAF::Sin.EOF:Sin.AOF.$$

De plus,

$$\left. \begin{array}{l} OBH=180°-OEF\,, \\ ODH=180°-OAF\,; \end{array} \right\} \text{donc} \left\{ \begin{array}{l} Sin.OBH=Sin.OEF\,, \\ Sin.ODH=Sin.OAF\,, \end{array} \right.$$

donc

$$Sin.BOH:Sin.DOH::Sin.EOF:Sin.AOF\,;$$

mais BOD=EOA; donc (*Lemme*) BOH=EOF, DOH=AOF; donc OF, OH sont en ligne droite; c'est-à-dire, que les diagonales du quadrilatère circonscrit passent par l'intersection des droites qui joignent les points de contact opposés. *C.Q.F.D.* (*)

(*) La proposition étant ainsi démontrée pour le cercle, se trouve l'être aussi pour toute section conique, qui peut toujours être considérée comme la perspective d'un certain cercle.

J. D. G.

Deuxième démonstration ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

Le théorème dont il s'agit n'est qu'un cas particulier du suivant, dont nous allons donner la démonstration.

THÉORÈME. Si, à une ligne quelconque du second ordre, on circonscrit un quadrilatère complet quelconque ; le point d'intersection de deux quelconques des trois diagonales de ce quadrilatère, sera aussi le point d'intersection des deux droites qui joindront les points où les côtés opposés du quadrilatère simple, auquel ces diagonales appartiennent, sont touchés par la courbe.

Démonstration. Soient prises pour axes des coordonnées deux droites, dont l'une passe par deux quelconques des points de contact, et dont l'autre passe par les deux autres ; la courbe, rapportée à ces deux axes, aura une équation de la forme

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0\ . \qquad \text{(A)}$$

On en déduira la situation de ces points, en y faisant successivement x et y égal à zéro et résolvant l'équation résultante.

Soient donc désignés par Y, Y′ les deux points de contact qui sont situés sur l'axe des y et par X, X′ ceux qui sont situés sur l'axe des x ; en posant, pour abréger,

$$d^2-4af=D^2\ , \qquad e^2-4cf=E^2\ ,$$

on trouvera les coordonnées de ces points ainsi qu'il suit :

$$\text{pour Y}\left\{\begin{array}{l} x=0\ , \\ y=-\dfrac{d-D}{2a}\ ; \end{array}\right. \qquad \text{pour Y}'\left\{\begin{array}{l} x=0\ , \\ y=-\dfrac{d+D}{2a}\ ; \end{array}\right.$$

$$\text{pour X}\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{e-E}{2c}\ , \\ y=0\ ; \end{array}\right. \qquad \text{pour X}'\left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{e+E}{2c}\ , \\ y=0\ . \end{array}\right.$$

Cela posé, on sait que l'équation de la tangente menée à la courbe par un point dont les coordonnées sont x', y', peut être mise sous cette forme

$$(2ay+bx+d)y'+(2cx+by+e)x'+(dx+ey+2f)=0\ ;$$

mettant

mettant donc successivement, pour x', y', dans cette équation, les valeurs déterminées ci-dessus, désignant les tangentes par leur point de contact, et posant encore, pour abréger,

$$bd-2ae=A\ ,\quad be-2cd=C\ ,$$

on trouvera les équations de ces tangentes ainsi qu'il suit :

pour Y, $\quad 2aDy+(bD-A)x+D(d-D)$,
pour Y', $\quad 2aDy+(bD+A)x+D(d+D)$,
pour X, $\quad 2cEx+(bE-C)y+E(e-E)$,
pour X', $\quad 2cEx+(bE+C)y+E(e+E)$.

Si l'on combine entre elles la première et la troisième équations, puis la seconde et la quatrième, puis la première et la quatrième, puis enfin la seconde et la troisième, on obtiendra les coordonnées des sommets du quadrilatère circonscrit ; d'où il sera facile de conclure les équations des diagonales de ce quadrilatère et de s'assurer conséquemment si ces diagonales passent en effet par l'origine.

Mais on peut parvenir plus simplement au but, en procédant comme il suit. Soit désigné par (Y, X) le sommet du quadrilatère, formé par la rencontre des tangentes dont les points de contact sont Y, X; et soient adoptées des notations analogues pour les autres sommets. Soit en outre désignée par [(Y, X), (Y′, X′)] la diagonale qui joint les sommets (Y, X), (Y′, X′) et soit adoptée une notation analogue pour l'autre diagonale.

Cela posé, soient éliminés les termes tout connus, entre les équations Y, X, en réduisant ces termes à l'unité, dans l'une et dans l'autre, et prenant ensuite la différence des deux équations. En employant toujours les abréviations ci-dessus, et posant en outre

$$AE+CD=F\ ,$$

il viendra ainsi,

$$E(F-bDE+2cD^2-eA)x=D(F-bDE+2aE^2-dC)y.$$

Cette équation, ayant lieu en même temps que les équations Y et X et n'ayant point de terme constant, doit être celle d'une droite menée de l'origine au point (Y, X). Or, par les substitutions, il est aisé de se convaincre que

$$2cD^2-eA=2aE^2-dC=2ac^2+2cd^2-bde-8acf,$$

donc aussi

$$F-bDE+2cD^2-eA=F-bDE+2aE^2-dC;$$

donc l'équation de la droite qui joint l'origine au point (Y, X) est simplement

$$Dy=Ex. \qquad \text{(I)}$$

Le système des équations Y′, X′ n'étant autre chose que celui des équations Y, X, dans lequel on aurait changé à la fois les signes de D et E; on obtiendra l'équation de la droite qui joint l'origine au point (Y′, X′) en opérant un pareil changement dans l'équation (I); et, comme alors elle reste la même, il en faut conclure que cette équation est celle d'une droite qui passe à la fois par l'origine et par les deux points (Y, X), (Y′, X′), qui sont ainsi en ligne droite avec cette origine.

Un semblable raisonnement prouvera que les sommets (Y, X), (Y′, X′), sont, avec l'origine, sur une même ligne droite, dont l'équation est

$$Dy=-Ex. \qquad \text{(II)}$$

Ainsi les deux diagonales du quadrilatère dont les côtés opposés touchent la courbe aux points où elle coupe les axes, peuvent être exprimées par l'équation unique

$$y=\pm x\sqrt{\frac{e^2-4cf}{d^2-4af}};$$

et il est digne de remarque que la direction de ces diagonales est indépendante de la grandeur et du signe du coefficient b.

Troisième démonstration;

Par M. Ferriot, docteur ès sciences, professeur de mathématiques au lycée de Besançon.

Soit un quadrilatère, inscrit arbitrairement à une section conique; et soit formé un quadrilatère circonscrit, dont les côtés touchent la courbe aux sommets du quadrilatère inscrit. Il s'agit de prouver que

l'intersection des diagonales de l'un des quadrilatères doit coïncider avec l'intersection des diagonales de l'autre.

Il est connu que, pour une situation convenable de l'œil et du tableau, un quadrilatère quelconque peut toujours, et même d'une infinité de manières, avoir pour perspective un parallélogramme. Ainsi on peut toujours placer l'œil et le tableau de telle sorte que la perspective de la figure dont il s'agit ici, soit une section conique à laquelle un parallélogramme est circonscrit, et à laquelle, de plus, est inscrit un quadrilatère dont les sommets sont les points de contact de ce parallélogramme avec la courbe.

Or, lorsqu'un parallélogramme est circonscrit à une section conique, les droites qui joignent les points de contact opposés, sont des diamètres de la courbe, et se coupent conséquemment en deux parties égales, à son centre; et, puisque ces droites sont les diagonales du quadrilatère inscrit, il en résulte que ce quadrilatère est aussi un parallélogramme. Ainsi la perspective de la figure dont il s'agit, est une section conique à laquelle sont inscrits et circonscrits deux parallélogrammes qui sont en même temps inscrits l'un à l'autre; et il est évident que, si l'intersection des deux diagonales de l'un de ces parallélogrammes coïncide avec l'intersection des deux diagonales de l'autre, il devra en être de même pour les deux quadrilatères dont ces parallélogrammes sont les perspectives.

La question est donc ramenée à prouver que, lorsque deux parallélogrammes sont inscrits l'un à l'autre, l'intersection des diagonales de l'un coïncide avec l'intersection des diagonales de l'autre; et cette proposition est trop facile à établir, par les élémens, pour qu'il soit nécessaire d'en développer ici la démonstration.

Quatrième démonstration;

Par M. G. Fornier, élève du lycée de Nismes.

Deux quadrilatères étant supposés l'un inscrit et l'autre circonscrit à une même section conique, de telle sorte que les sommets de l'inscrit soient les points où les côtés du circonscrit touchent la courbe, je

me propose de démontrer 1.° que les quatre diagonales des deux quadrilatères passent par le même point ; 2.° que les quatre points de concours des côtés opposés de ces deux mêmes quadrilatères sont sur une même droite.

I. Tout quadrilatère circonscrit à une section conique peut être considéré comme un hexagone circonscrit, dont deux angles, devenus chacun égal à deux angles droits, ont leurs sommets à deux quelconques des points de contact des côtés de ce quadrilatère avec la courbe.

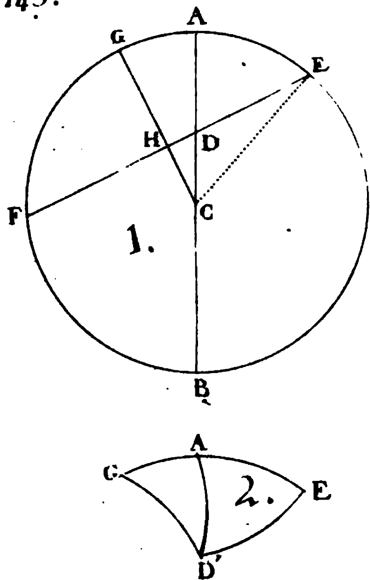
II. Pareillement, tout quadrilatère inscrit à une section conique, peut être considéré comme un hexagone inscrit, dont deux côtés, d'une longueur nulle, sont dirigés suivant les tangentes à deux quelconques des sommets de ce quadrilatère.

III. En particulier, on peut prendre l'une des diagonales du quadrilatère inscrit pour une diagonale joignant deux sommets opposés de l'hexagone circonscrit, auquel cas les deux diagonales du quadrilatère circonscrit seront aussi des diagonales joignant des sommets opposés du même hexagone; et, comme il est connu que les diagonales qui joignent les sommets opposés de tout hexagone circonscrit à une section conique se coupent en un même point, il s'ensuit que les quatre diagonales des deux quadrilatères doivent passer par un même point.

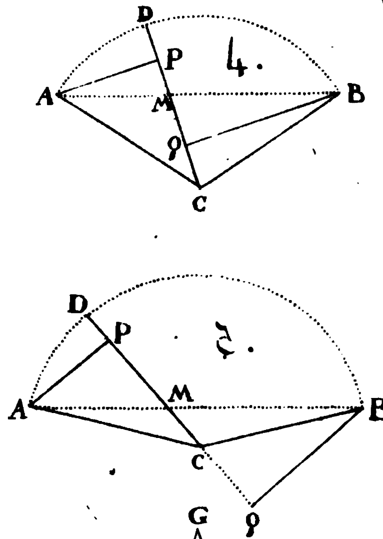
IV. Pareillement, on peut, en particulier, prendre deux côtés opposés du quadrilatère circonscrit pour côtés opposés de l'hexagone inscrit, auquel cas les côtés opposés du quadrilatère inscrit seront aussi des côtés opposés du même hexagone; et, comme il est connu que les points de concours des directions des côtés opposés de tout hexagone inscrit à une section conique sont situés sur une même ligne droite, il s'ensuit que les quatre points de concours des directions des côtés opposés des deux quadrilatères doivent être en ligne droite.

V. Ce tour de démonstration, qui s'étend également aux trois quadrilatères simples dont tout quadrilatère complet est composé, est en même temps propre à faire apercevoir beaucoup d'autres droites qui passent par les mêmes points, et beaucoup d'autres points qui appartiennent aux mêmes lignes droites.

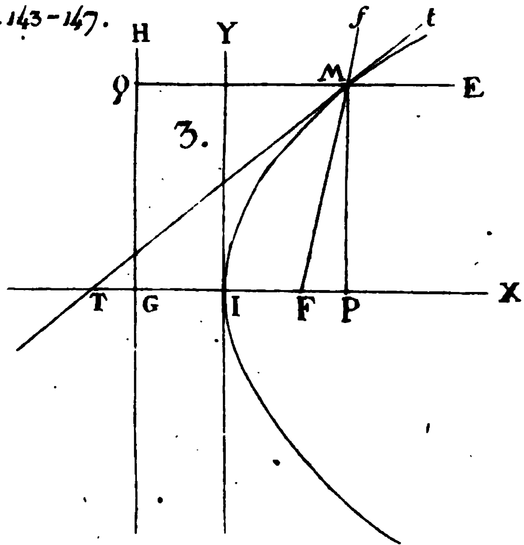
p. 141-143.

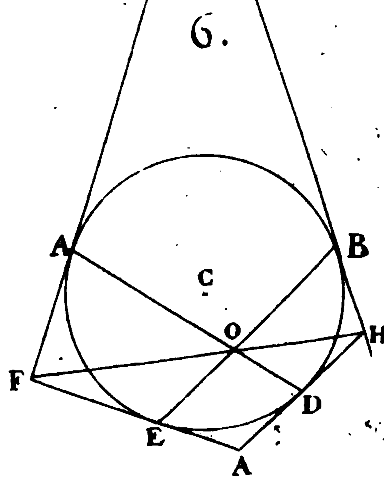


p. 161-169.



p. 143-147.





J. D. G. fecit.

GÉOMÉTRIE.

Mémoire sur la polyédrométrie ; contenant une démonstration directe du Théorème d'Euler *sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions auxquelles ce théorème est assujetti ;*

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

(*Extrait*) Par M. Gergonne.

Je me propose ici de rendre compte d'un mémoire, sur les polyèdres que M. Lhuilier a bien voulu me communiquer, et que son étendue m'oblige à regrets d'abréger. Dans l'extrait que j'en vais faire, j'apporterai tous mes soins à ne rien omettre de ce qui peut intéresser le lecteur.

Je vais d'abord laisser M. Lhuilier exposer lui-même le sujet de ses recherches et les motifs qui l'ont déterminé à s'y livrer.

« Le théorème de polyédrométrie d'Euler, suivant lequel, *dans* » *tout polyèdre, la somme du nombre des faces et du nombre* » *des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes*, » peut être regardé comme fondamental dans cette partie de la » géométrie (*). Il correspond à la proposition de géométrie plane » suivant laquelle, *dans tout polygone rectiligne, le nombre des*

(*) Voyez les *Mémoires de Pétersbourg*, pour 1752 et 1753, imprimés en 1758.

» *angles est égal au nombre des côtés*. Mais, tandis que cette » dernière proposition n'exige aucun développement, et ne souffre » aucune exception, la proposition correspondante sur les polyèdres » n'est rien moins qu'évidente, et n'est pas plus générale. Dans un » premier travail, l'auteur, n'ayant pu en trouver la démonstration, » se contenta de l'exposer sur plusieurs solides d'espèces différentes; » et il présenta comme probable, et comme fondée sur l'analogie » seulement, la conclusion tirée de ces cas particuliers à la pro- » position générale. Dans un second travail, sur le même sujet, » l'auteur donne enfin la démonstration de sa proposition. Il la tire » de la possibilité de diminuer d'une unité le nombre des angles » solides d'un polyèdre (non tétraèdral); d'où découle la possibilité » de le ramener à une pyramide, et en particulier à une pyramide » tétraèdrale. L'auteur développe cette possibilité, et il en tire les » conséquences relatives à la diminution correspondante du nombre » des faces et du nombre des arêtes.

» Dans les mêmes mémoires, Euler développe deux autres théorèmes » sur les polyèdres, relatifs à la valeur de la somme des angles » plans qui entrent dans la composition d'un polyèdre. Il démontre » que cette valeur est quatre angles droits, multipliés par l'excès du » nombre des arêtes sur le nombre des faces, ou quatre angles droits » multipliés par un nombre inférieur de deux unités à celui des » angles solides. Cette dernière expression lui paraît, avec raison, » bien remarquable. Elle répond à la valeur de la somme des angles » plans d'une figure rectiligne, dans le nombre de ses côtés ou de » ses angles. L'auteur, après l'avoir tirée des deux premiers théorèmes, » en a donné une démonstration immédiate, fondée sur le principe » déjà exposé; savoir: sur la possibilité de diminuer d'une unité le » nombre des angles solides d'un polyèdre (non tétraèdral).

» Legendre, dans ses *Élémens de géométrie*, a démontré les » mêmes théorèmes d'une manière remarquable par sa brièveté. Sa » démonstration est fondée sur l'expression de la surface d'un poly- » gone sphérique dans ses angles. Comme cette dernière expression

» suppose des principes déjà établis sur les figures sphériques, ce
» qui exige des développemens préliminaires; la brièveté de la démons-
» tration de Legendre n'est (suivant moi) qu'apparente ; et cette
» démonstration ne me paraît pas avoir le degré de simplicité qu'on
» est en droit de désirer, pour une proposition fondamentale.

» Il paraît qu'Euler a fait des tentatives inutiles pour démontrer
» ses théorèmes, par la décomposition du polyèdre en pyramides
» ayant pour sommet commun un point pris dans l'intérieur de ce
» polyèdre, et ayant ses faces pour bases. *Hic modus* (dit-il)
» *solidum quodcunque in pyramides resolvendi ad præsens institutum*
» *parum confert.* Cette assertion d'Euler m'a paru remarquable;
» elle a fixé mon attention; et le résultat de mes méditations, sur
» ce sujet, me paraît satisfaisant. Je trouve que la décomposition
» rejetée par Euler, comme inutile, conduit à la démonstration
» demandée, d'une manière très-simple et très-lumineuse, ainsi que
» je le développerai dans ce mémoire.

» Cette légère observation, relative à une simple différence dans
» le procédé d'une démonstration, ne sera, au surplus, que secon-
» daire dans ce qui va suivre. Je me propose principalement de
» montrer que le théorème d'Euler souffre des exceptions nom-
» breuses, et qu'il n'est vrai, d'une manière générale, que pour les
» polyèdres qui n'ont point de parties rentrantes, soit quant aux
» angles plans qui forment les angles solides, soit quant aux angles
» dièdres ou aux inclinaisons de leurs faces; ou, ce qui revient
» encore au même, pour les solides qui sont, en entier, d'un même
» côté du plan de chacune de leurs faces. Ces polyèdres sont, à
» la vérité, ceux qu'on a coutume de considérer principalement
» dans les élémens. Cependant la définition des polyèdres, suivant
» laquelle ils sont des solides terminés de toutes parts, par des
» figures planes, n'exclut point les polyèdres à parties rentrantes.
» A moins donc qu'on n'avertisse (ainsi que le fait Legendre),
» qu'on s'occupe exclusivement des premiers polyèdres, on s'expose
» à donner comme générales des conclusions qui ne sont applicables

» qu'au point de vue particulier sous lequel on a envisagé le sujet » dont on s'occupe. »

On voit, par cet exposé, que le mémoire de M. Lhuilier renferme deux parties bien distinctes. Dans la première, l'auteur se propose de démontrer le théorème d'Euler, d'une manière qui lui est propre. Son but, dans la seconde, est d'indiquer les diverses sortes d'exceptions auxquelles ce théorème est sujet. Je suivrai la même division dans l'analise de ce mémoire.

1. La première proposition que M. Lhuilier établit, et qui est presque évidente d'elle-même, est que, *dans toute pyramide, le nombre des faces, plus le nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes.* On voit en effet que, si l'on désigne respectivement par F, S, A ces trois nombres, et qu'on représente par m le nombre des côtés du polygone base de la pyramide, on aura

$$F=m+1\ ,\qquad S=m+1\ ,\qquad A=2m\ ;$$

d'où

$$F+S=2m+2=A+2.$$

2. M. Lhuilier établit ensuite cet autre théorème : *Si deux polyèdres sont tels que, dans chacun, le nombre des faces, plus le nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arêtes; et si, en même temps, ces deux polyèdres ont une face égale par laquelle ils puissent être appliqués l'un à l'autre; dans le polyèdre résultant de leur réunion, la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpassera aussi de deux unités le nombre des arêtes.*

Pour prouver cette proposition, M. Lhuilier considère que si n désigne le nombre des côtés des faces des deux polyèdres que l'on fait coïncider; que de plus p, p' et P désignent tant les deux corps que le corps formé de leur assemblage; que les nombres de faces d'angles solides et d'arêtes soient f, s, a, pour p, qu'ils soient f', s', a', pour p', et qu'ils soient enfin F, S, A, pour P, on devra avoir

$$F=f+f'-2\ ,\qquad S=s+s'-n\ ;\qquad A=a+a'-n\ ;$$

d'où

$$F+S=(f+s)+(f'+s')-(n+2)\ ;$$

mais, par l'hypothèse,

$$f+s=a+2\ ,\qquad f'+s'=a'+2\ ;$$

donc

$$F+S=(a+a'-n)+2=A+2.$$

Je dois observer ici qu'il n'est pas vrai généralement que, comme le suppose M. Lhuilier, la coïncidence des deux polyèdres diminue de n le nombre total, tant de leurs angles solides que de leurs arêtes, et de 2 le nombre de leurs faces; mais néanmoins la proposition est vraie dans tous les cas.

D'abord, par l'application des deux solides, l'un contre l'autre, il peut arriver que deux faces correspondantes et adjacentes aux faces superposées coïncident, de manière à ne former, par leur réunion, qu'une face unique; le solide composé aura donc une face de moins qu'il n'en aurait eu sans cette circonstance; mais il aura aussi une arête de moins. Si donc le nombre des coïncidences de cette nature est m, tandis que F se changera en $F-m$, A se changera aussi en $A-m$, ce qui ne changera rien à l'équation $F+S=A+2$.

Deux angles solides, correspondans dans les deux corps, peuvent être trièdres, et tels que, par leur réunion, ils forment un angle dièdre. Cette circonstance entraînera la réduction de quatre faces à deux, celle de quatre arêtes à une seule, et la suppression d'un angle solide. Si donc cela arrive m fois, F se changera en $F-2m$, S en $S-m$, et A en $A-3m$; ce qui ne changera encore rien à l'équation $F+S=A+2$.

Il est essentiel de remarquer que si, dans un angle solide du corps total résultant de la réunion de deux angles solides correspondans des corps partiels, deux arêtes se trouvaient ne former qu'une seule ligne droite, cette ligne droite n'en devrait pas moins être

comptée pour deux arêtes distinctes. En général, il faudra supposer, dans tout ce qui va suivre, que, si plusieurs sommets d'un polyèdre se trouvent situés sur une même ligne droite, et que cette ligne droite soit en même temps arête de tous les angles solides auxquels ces sommets appartiennent, elle devra être comptée pour autant d'arêtes distinctes que ces sommets y formeront de divisions.

3. Le tour de raisonnement qui vient d'être employé, pour démontrer la seconde proposition de M. Lhuilier, peut être appliqué à démontrer une proposition de géométrie plane dont on n'a encore donné nulle part jusqu'ici une démonstration complète. Cette proposition est que, *dans tout polygone, plans et rectiligne, la somme des angles intérieurs vaut deux angles droits pris autant de fois moins deux que le polygone a de côtés.* Les démonstrations qu'on en donne communément suppose que le polygone est convexe ou que du moins il existe quelque point, dans son intérieur, par lequel il est impossible de faire passer une droite qui rencontre son périmètre en plus de deux points. Voici comment on en peut obtenir une démonstration générale, et tout à fait indépendante de la nature du polygone.

Il faut d'abord démontrer que *si, dans deux polygones, la somme des angles intérieurs vaut deux angles droits, pris autant de fois moins deux que ces polygones ont de côtés; et, si ces polygones ont un côté égal par lequel ils puissent être réunis l'un à l'autre, de manière à ne plus former qu'un polygone unique, la somme des angles intérieurs de ce nouveau polygone sera encore égale à deux angles droits, pris autant de fois moins deux que ce polygone aura de côtés.*

Soient, en effet, p, p' les deux polygones proposés; soit P le polygone résultant de leur assemblage; soient respectivement m, m', M les nombres de côtés de ces polygones; soit Δ l'angle droit et soient enfin respectivement s, s', S les sommes d'angles intérieurs de trois polygones.

D'après l'hypothèse, on aura

$$s=2(m-2)\Delta \quad , \qquad s'=2(m'-2)\Delta.$$

Présentement, dans la réunion des deux polygones, il peut se présenter les trois cas que voici : 1.° ou aucun des deux angles adjacents au côté commun, dans l'un des polygones, ne sera supplément de son correspondant dans l'autre polygone ; 2.° ou l'un seulement de ces angles, dans le premier, sera supplément de son correspondant dans le second ; 3.° ou enfin ils seront tous deux, dans le premier, supplémens de leurs correspondans dans le second.

Dans le *premier cas*, on aura

$$S=s+s' \quad , \quad M=m+m'-2\;;$$

d'où

$$S=2(m+m'-4)\Delta=2(M-2)\Delta.$$

Dans le *second cas*, on aura

$$S=s+s'-2\Delta \quad , \quad M=m+m'-3\;;$$

d'où

$$S=2(m+m'-5)\Delta=2(M-2)\Delta.$$

Enfin, dans le *troisième cas*, on aura

$$S=s+s'-4\Delta \quad , \quad M=m+m'-4\;;$$

d'où

$$S=2(m+m'-6)\Delta=2(M-2)\Delta.$$

Cela posé, soit un polygone non convexe, ayant des angles rentrans, en nombre quelconque. Si par le sommet de l'un quelconque de ces angles rentrans, on mène une droite indéfinie qui passe entre les côtés de cet angle, cette droite divisera le polygone en deux autres qui, pris ensemble, auront évidemment un angle rentrant de moins que le premier. Opérant donc de la même manière sur ceux-ci, et poursuivant continuellement ainsi, le polygone proposé se trouvera enfin divisé en un certain nombre de polygones convexes, dans chacun desquels la somme des angles intérieurs sera, comme l'on sait, égale à deux angles droits, pris autant de fois moins deux que ce polygone aura de côtés.

Le polygone proposé pouvant donc être considéré comme formé

par l'application successive de ces polygones partiels les uns contre les autres ; en vertu du théorème démontré, il devra jouir aussi de la même propriété.

De là résulte cette conséquence, savoir : que *le plus petit nombre des triangles dans lesquels un polygone quelconque puisse être divisé, est toujours inférieur de deux unités au nombre de ses côtés.*

4. Cette conséquence, et le principe d'où elle dérive, ne sont vrais, au surplus, qu'autant que le polygone est terminé par une seule ligne continue. On ne pourrait l'appliquer, par exemple, au *polygone annulaire* ou *couronne polygonale*, c'est-à-dire, à l'espace plan compris entre deux polygones décrits l'un dans l'autre.

Soient m et m' les nombres de côtés des polygones extérieur et intérieur bornant la couronne. Tandis que la somme des angles du premier devra être estimée $2(m-2)\Delta$, la somme des angles du second devra être estimée $4m'\Delta-2(m'-2)\Delta$ ou $2(m'+2)\Delta$; la somme des angles intérieurs de la couronne sera donc $2(m+m')\Delta$, c'est-à-dire, autant de fois deux angles droits qu'elle aura de côtés ; elle ne pourra donc être divisée en un moindre nombre de triangles.

En général, un espace plan peut être compris entre n polygones, extérieurs les uns aux autres, et un polygone qui les enferme tous. Si M est le nombre total des lignes droites qui terminent cet espace, la somme de ses angles intérieurs sera $2[M+2(n-1)]\Delta$.

5. Je reviens au mémoire de M. Lhuilier. L'auteur établit pour troisième proposition que, *si un corps est composé d'un nombre quelconque de pyramides, ayant un sommet commun ; de manière que ces pyramides soient appliquées, deux à deux, par des faces latérales communes ;* le nombre *des faces de ce corps augmenté du nombre de ses angles solides surpassera de deux unités le nombre de ses arêtes.* Cette proposition est, en effet, une conséquence nécessaire et évidente de ce qui a été démontré (1 et 2).

M. Lhuilier observe ensuite que, bien que la démonstration de cette proposition suppose que chaque nouvelle pyramide qu'on introduit ne s'applique au corps formé de la réunion des autres que

par

par une seule face latérale, elle aura lieu également, si la coïncidence a lieu pour un plus grand nombre de faces de la nouvelle pyramide introduite.

En supposant, en effet, que cette coïncidence s'opère par n faces latérales consécutives, au lieu de s'opérer par une seule; il en résultera, dans le solide total, une diminution de $2(n-1)$ faces, de $(n-1)$ angles solides et de $3(n-1)$ arêtes; F, S, A se changeront donc respectivement en $F-2(n-1)$, $S-(n-1)$, $A-3(n-1)$; ce qui ne changera rien à l'équation $F+S=A+2$. Ce raisonnement s'appliquant évidemment au cas où la dernière pyramide coïnciderait avec l'avant-dernier solide par toutes ses faces latérales, en remplissant un creux pyramidal qui y serait resté; je me dispenserai de transcrire ici ce que M. Lhuilier dit en particulier, relativement à ce cas. Je ne dirai rien non plus du cas où la réunion de deux pyramides amenerait leurs bases à ne plus former qu'un seul plan; d'autant qu'en complétant, comme je l'ai fait, la démonstration de la deuxième proposition de M. Lhuilier, l'examen particulier de ce cas devient absolument superflu.

6. De tout ce qui précède résulte évidemment que, *dans tout polyèdre, le nombre des faces augmenté du nombre des angles solides, surpasse de deux unités le nombre des arêtes*, toutes les fois, du moins, que ce polyèdre pourra être considéré comme composé de pyramides ayant un sommet commun; ce qui aura lieu pour tout polyèdre convexe, et plus généralement pour tout polyèdre dans l'intérieur duquel il y aura au moins un point par lequel il sera impossible de faire passer une droite qui rencontre sa surface en plus de deux points. Mais, en appliquant à la proposition (2) un raisonnement analague à celui qui a été fait (3), pour les polygones, on parviendra aisément à se convaincre que le *Théorème d'Euler* est vrai généralement, pour les polyèdres convexes ou non convexes, sauf les exceptions dont il sera parlé ci-après.

7. Ce théorème est, au surplus, susceptible d'une démonstration qui, sans être plus longue que celle de M. Legendre, a sur elle l'avan-

tage d'être tout-à-fait élémentaire. Je vais l'exposer en peu de mots.

Soit d'abord N le nombre des côtés d'un polygone quelconque; soit divisé ce polygone, d'une manière arbitraire, en compartimens polygonaux, par des droites concourant tant à ses sommets qu'à différens points dans son intérieur. Soient f le nombre des polygones partiels résultant de sa décomposition, s le nombre des points, y compris les sommets du polygone donné, où concourent les droites qui servent de côtés à ces polygones, et enfin a le nombre de ces droites en y comprenant les N côtés du polygone donné.

Soient m, m', m'',.... les nombres respectifs de côtés des polygones partiels; leurs sommes d'angles seront respectivement $2m\Delta-4\Delta$, $2m'\Delta-4\Delta$, $2m''\Delta-4\Delta$,......; donc la somme de tous leurs angles sera

$$2(m+m'+m''+\ldots.)\Delta-4f\Delta\,,$$

cette somme devant être égale à la somme $2(N-2)\Delta$ des angles intérieurs du polygone proposé, plus à autant de fois quatre angles droits qu'il y a de points de concours intérieurs, et le nombre de ceux-ci étant évidemment $s-N$, on aura

$$2(m+m'+m''+\ldots.)\Delta-4f\Delta=2(N-2)\Delta+4(s-N)\Delta\,,$$

ou plus simplement

$$m+m'+m''+\ldots.-2f=2s-N-2\,;$$

mais chaque ligne, excepté les côtés du polygone proposé, servant de côté à deux polygones, on doit avoir

$$2a=N+m+m'+m''+\ldots..\,;$$

ajoutant cette équation à la précédente, il viendra, en réduisant, transposant et divisant par 2,

$$f+s=a+1\,;$$

c'est-à-dire, que *le nombre des polygones partiels, augmenté du nombre des points de concours des droites qui les forment, surpasse d'une unité le nombre de ces droites.*

Cela posé, soit un polyèdre dont une face soit transparente ; et concevons que l'œil s'approche assez de cette face, extérieurement, pour qu'il puisse apercevoir l'intérieur de toutes les autres faces ; ce qui sera toujours possible, lorsque le polyèdre sera convexe. Les choses étant ainsi disposées, concevons qu'il soit fait, sur le plan de la face transparente, une perspective de l'ensemble de toutes les autres. En conservant les mêmes notations que ci-dessus, cette perspective sera un polygone divisé en $F-1$ compartimens polygonaux, terminés par A droites concourant en S points. On aura donc, par ce qui précède,

$$(F-1)+S=A+1\ ,$$

d'où

$$F+S=A+2.$$

Ceci ne s'applique généralement, à la vérité, qu'aux polyèdres convexes ; mais nous avons déjà vu que la proposition étant vraie pour les polyèdres de cette nature, elle l'est aussi pour tous les autres.

Au surplus, quelque simple que soit cette démonstration, on lui préfèrera peut-être encore, avec raison, la belle démonstration de M. Cauchy (*), qui a le précieux avantage de ne supposer nullement que le polyèdre soit convexe.

8. Si l'on veut que, dans un polyèdre, toutes les faces aient un même nombre f de côtés, et tous les angles solides un même nombre s d'arêtes, on aura, pour déterminer A, F, S les trois équations

$$fF=2A\ ,\qquad sS=2A\ ,\qquad S+F=A+2.$$

Ces équations n'éprouvant aucun changement, lorsqu'on y permute à la fois f contre s et F contre S, on en conclut que les polyèdres de cette nature sont réciproques, deux à deux ; en sorte que, dans les deux d'une même couple, le nombre des arêtes est le même,

(*) Voyez la *Correspondance sur l'école polytechnique*, tom. II, n.° 3, janvier 1811, page 253.

et que, de plus, le nombre des faces de chacun est le même que le nombre des sommets de l'autre; ce qui permet de les inscrire ou circonscrire l'un à l'autre.

De ces équations on tire

$$A=\frac{2fs}{2(f+s)-fs}\,,\quad F=\frac{4f}{2(f+s)-fs}\,,\quad S=\frac{4f}{2(f+s)-fs}\,.$$

La nécessité d'avoir pour f, s, F, S, A des nombres entiers positifs, plus grands que 2, borne les solutions de ces équations aux suivantes :

$f=$	3	3	4	3	5	3	6	4 ;
$s=$	3	4	3	5	3	6	3	4 ,
$F=$	4	8	6	20	12	∞	∞	∞ ,
$S=$	4	6	8	12	20	∞	∞	∞ ,
$A=$	6	12	12	30	30	∞	∞	∞ .

On conclut de là que non seulement il n'y a que cinq corps réguliers, mais qu'il ne peut exister que cinq sortes de polyèdres, réguliers ou non, dont toutes les faces aient le même nombre de côtés, et tous les angles solides le même nombre d'arêtes.

On voit, en outre, que la sphère peut, sous trois points de vue différens, être considérée comme un polyèdre régulier, ayant des faces infiniment petites en nombre infini ; ces faces pouvant être ou des triangles réunis six par six, ou des hexagones réunis trois par trois, ou enfin des quarrés réunis quatre par quatre.

On voit encore qu'un plan ne peut être exactement couvert avec des polygones d'une même sorte, assemblés en même nombre autour de chaque sommet, que de trois manières différentes, savoir : avec des triangles rassemblés six par six ; 2.° avec des quarrés assemblés quatre par quatre ; 3.° avec des hexagones assemblés trois par trois.

On voit enfin que les polyèdres réguliers de mêmes couples sont le tétraèdre avec lui-même, l'hexaèdre avec l'octaèdre, le dodécaèdre avec l'icosaèdre, la sphère couverte d'hexagones avec la sphère cou-

verte de triangles, et enfin la sphère couverte de quarrés avec elle-même (*).

9. Après avoir démontré, de la manière que nous avons dit ci-dessus, le théorème fondamental d'Euler, M. Lhuilier s'occupe de la démonstration du second théorème, relatif à l'expression de la somme des angles des faces d'un polyèdre : voici cette démonstration.

Soient $f_3, f_4, f_5, \ldots f_n$ les nombres qui expriment combien il y a, dans un polyèdre, de faces ayant respectivement 3, 4, 5, ... n côtés ; soient F le nombre total des faces du polyèdre, A le nombre de ses arêtes, et V la valeur totale des angles de ses faces. L'angle droit étant pris pour une unité, on aura

$$V=2f_3(3-2)+2f_4(4-2)+2f_5(5-2)+\ldots\ldots+2f_n(n-2)\ ,$$

ou

$$V=2(3f_3+4f_4+5f_5+\ldots+nf_n)-4(f_3+f_4+f_5+\ldots+f_n)\ ,$$

ou, enfin,

$$V=4A-4F=4(A-F)\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des angles des faces d'un polyèdre vaut quatre angles droits, pris autant de fois qu'il y a d'unités dans l'excès du nombre des arêtes de ce polyèdre sur le nombre de ses faces.*

L'équation $F+S=A+2$ donnant $A-F=S-2$; on a aussi

$$V=4(S-2)\ ;$$

c'est-à-dire, *la somme des angles des faces d'un polyèdre vaut quatre angles droits pris autant de fois moins deux que le polyèdre a de sommets.*

(*) Dans les *Mémoires de l'académie des sciences* de Paris, pour 1725, M. de Mairan a donné des recherches curieuses relatives à l'inscription et à la circonscription du cube à l'octaèdre; mais personne, que je sache, ne s'est occupé des mêmes questions relativement aux autres couples de polyèdres. Les recherches de ce genre exigent d'autant plus de sagacité qu'on ne saurait guère y appliquer les méthodes ordinaires.

M. L'huilier remarque que les deux équations $V=4(A-F)$ et $V=4(S-2)$ étant susceptibles d'être démontrées directement, et indépendamment l'une de l'autre, il en résulte de nouveau $F+S=A+2$; mais il ne croit pas devoir s'arrêter à développer ce moyen de démonstration.

10. M. Lhuilier indique encore un autre moyen de démonstration assez simple, et que je vais développer brièvement.

Soient F, S, A respectivement les nombres de faces de sommets et d'arêtes d'un tronc de prisme que, pour fixer les idées, on peut supposer faire partie d'un prisme droit; si l'on désigne par m le nombre des côtés du polygone qui sert de base à ce tronc, on aura évidemment

$$F=m+2 \quad , \qquad S=2m \quad , \qquad A=3m \; ;$$

d'où

$$F+S=3m+2=A+2 \; ;$$

c'est-à-dire, que, *dans un tronc de prisme, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse de deux unités le nombre des arêtes.*

Soit présentement un corps formé par une suite de troncs de prismes droits, dont les bases inférieures, toutes situées sur un même plan horizontal, et contiguës les unes aux autres, forment, par leur réunion, un poligone unique; ces troncs se trouvant unis les uns aux autres par des faces latérales égales. Par un raisonnement semblable à celui qui a été développé (5), on prouvera aisément que, dans le corps formé de l'assemblage de ces prismes, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse de deux unités le nombre des arêtes.

La base supérieure de ce corps est une surface polyèdre non fermée. Désignons par f le nombre de ses faces, par s le nombre de ses sommets, et par a le nombre de ses arêtes. Soit N le nombre des côtés de la base inférieure du même corps; soient F le nombre total de ses faces, S le nombre total de ses sommets et A le nombre total de ses arêtes, nous aurons évidemment

$$F=f+N+1 \quad , \quad S=s+N \quad , \quad A=a+2N \; ;$$

puis donc qu'on doit avoir

$$F+S=A+2 \; ,$$

il viendra

$$(f+N+1)+(s+N)=(a+2N)+2 \; ,$$

ou, en réduisant

$$f+s=a+1 \; ;$$

c'est-à-dire, que, *dans une surface polyèdre, non fermée, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse d'une unité le nombre des arêtes*, pourvu cependant que cette surface soit de nature à ce que les perpendiculaires à un plan convenablement situé par rapport à elle, ne la rencontrent qu'en un seul point.

Soit enfin un polyèdre quelconque auquel on circonscrive un prisme dont les arêtes aient une direction telle qu'aucune d'elles ne se confonde avec ses faces. Ce prisme touchera le polyèdre selon une suite d'arêtes consécutives qui diviseront sa surface en deux surfaces polyèdres non fermées. Soient respectivement f et f' les nombres de faces de ces deux portions, s et s' leurs nombres de sommets, et enfin a et a' leurs nombres d'arêtes; on aura, par ce qui précède,

$$f+s=a+1 \quad , \quad f'+s'=a'+1.$$

Soient ensuite F le nombre total des faces du polyèdre, S le nombre de ses sommets, et A le nombre de ses arêtes. En désignant par N le nombre des côtés du polygone, plan ou gauche, qui termine ses deux parties, on aura évidemment

$$F=f+f' \quad , \quad S=s+s'-N \quad , \quad A=a+a'-N \; ;$$

d'où

$$F+S=(f+s)+(f'+s')-N=(a+a'-N)+2=A+2.$$

Ceci suppose toujours, au surplus, qu'il y a un certain plan tel que les droites qui lui sont perpendiculaires ne rencontrent la surface

du polyèdre qu'en deux points au plus; mais tout plan satisfait à cette condition, lorsque le polyèdre est convexe; et l'on sait que le théorème, une fois démontré pour les polyèdres de cette nature, peut être facilement étendu à tous les autres.

Dans la seconde partie de son mémoire, M. Lhuilier, ainsi que je l'ai annoncé, s'occupe des diverses exceptions auxquelles le *Théorème d'Euler* est assujetti. Ces exceptions sont de trois sortes. Je vais les présenter successivement.

11. La première sorte d'exception a lieu lorsque le polyèdre renferme une cavité intérieure; c'est-à-dire, lorsqu'il est compris entre deux surfaces isolées et entièrement renfermées l'une dans l'autre.

Soient alors, en effet, f, s, a les nombres de faces, de sommets et d'arêtes de la surface extérieure; soient f', s', a' les nombres analogues pour la surface intérieure; on aura, par ce qui précède,

$$f+s=a+2 \quad ; \quad f'+s'=a'+2\ ;$$

d'où

$$(f+f')+(s+s')=(a+a')+4\ ;$$

mais, en désignant par F le nombre total des faces du polyèdre, par S le nombre total de ses sommets, et par A le nombre total de ses arêtes, on aura évidemment

$$f+f'=F \quad ; \quad s+s'=S \quad ; \quad a+a'=A\ ;$$

on aura donc aussi

$$F+S=A+4\ ;$$

c'est-à-dire, que, *dans un tel polyèdre, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, surpasse de quatre unités le nombre des arêtes.*

En

En général, un corps peut être compris entre n surfaces polyèdres fermées, extérieures les unes aux autres, et une surface polyèdre fermée qui les renferme toutes; en conservant d'ailleurs les mêmes notations que ci-dessus, on a alors

$$F+S=A+2(n+1).$$

Si l'on représente par V la valeur totale de la somme des angles des faces d'un tel polyèdre, on aura (9)

$$V=4(A-F)=4[S-2(n+1)].$$

12. La seconde sorte d'exception a lieu, lorsque le polyèdre est *annulaire*; c'est-à-dire, lorsqu'étant d'ailleurs compris sous une surface unique, il a une ouverture qui le traverse de part en part.

Concevons que l'on fasse à un tel anneau une section plane qui, en supposant les deux faces de la section séparées, le fasse rentrer dans la classe des polyèdres ordinaires; soient alors désignés par F' le nombre de ses faces, par S' le nombre de ses sommets, et par A' le nombre de ses arêtes; on aura, comme ci-dessus,

$$F'+S'=A'+2.$$

Soient n les nombres de côtés de deux faces de la section; concevons que l'on soude ces deux faces l'une à l'autre, pour rétablir le polyèdre dans son état primitif; soient alors S, F, A les quantités analogues à celles que nous avions désignées par S', F', A', lorsque le polyedre était ouvert; en raisonnant comme nous l'avons fait (2), on se convaincra qu'on doit avoir

$$F+S-A=F'+S'-A'-2=2-2=0,$$

ou

$$F+S=A\ ;$$

c'est-à-dire, que, *dans un tel polyèdre, le nombre des faces, augmenté du nombre des sommets, est précisément égal au nombre des arêtes.*

En général un polyèdre terminé par une surface unique peut être percé, de part en part, par un nombre plus ou moins grand d'ouvertures distinctes. Si n désigne le nombre de ses ouvertures, on aura

$$F+S=A-2(n-1).$$

Si l'on représente par V la valeur totale de la somme des angles des faces d'un tel polyèdre, on aura (9)

$$V=4(A-F)=4[S+2(n-1)].$$

13. J'avais, depuis long-temps, remarqué ces deux premières sortes d'exceptions; mais M. Lhuilier est, je crois, le premier qui ait fait attention à la troisième; et elle devait d'autant plus facilement échapper à l'observation des géomètres, que les polyèdres auxquels elle est relative, ne paraissent pas différer essentiellement de ceux que l'on est dans l'usage de considérer. Cette troisième sorte d'exception a lieu, lorsque quelques-unes des faces du polyèdre sont des polygones compris dans l'exception qui a été développée (4); comme, par exemple, lorsqu'une des faces du polyèdre est une couronne polygonale; ainsi qu'il arrive, lorsque le polyèdre résulte de l'union de deux autres polyèdres, par deux faces inégales, dont la plus petite se trouve entièrement comprise dans la plus grande.

Pour passer, de suite, au cas le plus général, supposons que l'une des faces du polyèdre soit comprise entre n polygones extérieurs les uns aux autres et un polygone qui les renferme tous. Il est facile

de se convaincre qu'en menant convenablement, dans cette face, $n+1$ diagonales, elles la diviseront en deux polygones qui ne se trouveront plus dans le cas d'exception ; de manière qu'il sera permis de considérer alors ces deux polygones comme deux faces du polyèdre, pourvu que l'on considère les $n+1$ diagonales qu'on aura menées comme autant de nouvelles arêtes. Le polyèdre se trouvant ainsi hors du cas d'exception ; si l'on désigne par F' le nombre total de ses faces, la face dont il s'agit étant comptée comme double ; par S' le nombre de ses sommets ; et enfin par A' le nombre de ses arêtes, y compris les $n+1$ diagonales dont il vient d'être question ; on devra avoir

$$F'+S'=A'+2.$$

Mais si l'on désigne par F, S, A les mêmes choses pour le polyèdre, considéré sous le premier point de vue, on aura évidemment

$$F'=F+1 \quad , \quad S'=S \quad , \quad A'=A+(n+1) \ ;$$

en substituant donc et transposant, il viendra

$$F+S=A+(n+2) \ ;$$

c'est-à-dire, que, *dans un tel polyèdre, le nombre des faces augmenté du nombre des sommets surpasse le nombre des arêtes de deux unités augmentées du nombre des polygones intérieurs à la face qui fait exception, ou d'une unité augmentée du nombre total des polygones qui terminent cette face.*

En général, le polyèdre peut avoir plusieurs faces dans le cas d'exception développé (4); et si, pour celles qui suivent la première, on désigne par n', n'', n''', ... ce que nous avons désigné par n, pour celle-ci, on aura

$$F+S=A+(2+n+n'+n''+\ldots).$$

Si l'on représente par V la valeur totale des angles des faces d'un tel polyèdre, on aura

$$V=4\{(A-F)+(n+n'+n''+\ldots.)\}=4(S-2)\ ;$$

ainsi, il n'y a lieu ici à aucune exception quant à la valeur de la somme des angles des faces, lorsqu'on évalue cette somme en fonction du nombre des sommets.

« L'exception que je viens d'exposer » dit M. Lhuilier » doit se » présenter fréquemment dans la nature. Dans les agrégations mu- » tuelles des corps, et en particulier dans les groupes de cristaux, » à moins qu'il n'y ait une cause puissante qui les détermine à » s'appliquer par des faces coïncidentes, il doit se rencontrer des » cas où l'application se fait d'une manière propre à donner lieu » à l'exception dont il s'agit. Aussi ai-je vu, dans la belle collection » de minéraux que possède mon ami et collègue le professeur Pictet, » l'un des inspecteurs généraux de l'université, différens groupes » de cristaux, conformes à cette exception ; parmi lesquels j'ai remar- » qué des groupes de cristaux de spath calcaire, et des grès de la » carrière de Montmartre. »

14. M. Lhuilier termine par observer que les trois sortes d'exceptions qu'il vient de considérer, et qui paraissent être les seules auxquelles le théorème d'Euler puisse être sujet, pouvant se trouver réunis dans un même polyèdre, et s'y trouver chacune indéfiniment ; il s'ensuit qu'il peut exister des polyèdres dans lesquels le nombre des faces augmenté du nombre des sommets surpasse le nombre des arêtes, ou soit surpassé par lui d'un nombre d'unités donné et quelconque.

Si i représente le nombre des cavités intérieures d'un polyèdre ; que o désigne le nombre des ouvertures qui y sont pratiquées, de

part en part, et qu'enfin plusieurs des faces soient bornées par des polygones intérieurs au nombre de p, p', p'',.... pour chacune d'elles respectivement ; on aura

$$F+S=A+2(i-o+1)+(p+p'+p''+....) ;$$

et conséquemment la condition nécessaire et suffisante pour que le polyèdre ne fasse pas exception au théorème d'Euler, sera

$$2i+p+p'+p''+....=2o.$$

GÉOMÉTRIE.

Démonstration de deux théorèmes de polyédrométrie ;

Par M. Français, professeur de mathématiques à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



En désignant par S le nombre des sommets ou angles solides d'un polyèdre quelconque ; par A le nombre de ses arêtes ; par F le nombre de ses faces ; par P la somme des angles plans de ces mêmes faces ; et enfin par D un angle droit ; on a ces deux théorèmes d'Euler

$$S+F=A+2 ; \quad (1) \qquad P=4D(S-2). \quad (2) \quad (*)$$

(*) Voyez le précédent mémoire. J. D. G.

Soient représentées, de plus, par S_1 la somme des angles solides ou polyèdres, et par A_1 la somme des angles dièdres. (*)

Cela posé; soit p un angle polyèdre quelconque, formé par un nombre n de faces; soit s la somme des angles dièdres que ces faces forment consécutivement, et par conséquent $\frac{s}{2}$ la somme des inclinaisons consécutives de ces faces (**); on aura

$$p=\frac{s}{2}-2D(n-2). \qquad (3) \qquad (***)$$

Si l'on évalue de la même manière tous les angles solides d'un polyèdre, et qu'on les ajoute ensemble; la somme de tous les p deviendra S_1; celle de tous les s deviendra $2A_1$ (car chacun des angles dièdres se trouve répété deux fois); la somme des n, par la même raison, deviendra $2A$; et le nombre -2, se trouvant répété autant qu'il y a d'angles solides, deviendra $-2S$; ainsi on aura

$$S_1=A_1-2D(2A-2S)=A_1-4D(A-S). \qquad (4)$$

Cette équation, mise sous la forme

$$S.4D-S_1=A.4D-A_1, \qquad (5)$$

exprime une propriété bien simple et bien remarquable des polyèdres,

(*) Je distingue l'angle dièdre de l'inclinaison des deux plans qui forment cet angle : cette inclinaison n'est égale qu'à la moitié de l'angle dièdre qui, pour l'uniformité, doit, comme les angles polyèdres, être mesuré par la portion de surface sphérique qu'il intercepte. Or, un angle dièdre équivaut à deux angles trièdres, ayant chacun pour mesure l'inclinaison des deux plans qui forment l'angle dièdre.

Note de M. Français.

(**) Voyez la précédente note.

(***) Voyez la *Géométrie* de M. Legendre, liv. VII, prop. XXIV.

J. D. G.

qui peut être énoncée ainsi : *la somme des supplémens (à une demi-sphère) des angles solides d'un polyèdre est égale à la somme des supplémens (à une demi-sphère) des angles dièdres de ce polyèdre.*

Si, dans l'équation (4), on substitue, pour $A-S$, sa valeur $F-2$, donnée par l'équation (1), elle devient

$$A_1-S_1=4D(F-2)\,; \qquad (6)$$

et fait voir que *l'excès de la somme des angles dièdres d'un polyèdre sur celle de ses angles solides est égal à autant de fois quatre angles droits que le polyèdre a de faces moins deux.* Cet excès ne dépend donc que du nombre des faces, de même que la somme des angles plans P ne dépend que du nombre des sommets ou angles solides.

Les équations (1), (2), (6) forment un système de relations, entre les cinq quantités A, S, F, P, A_1-S_1, au moyen duquel deux quelconques d'entre elles étant données, on pourra déterminer les trois autres.

N. B. Les deux théorèmes que je viens de démontrer sont dus à feu mon frère, qui y est parvenu par des sommations longues et pénibles. La démonstration que je viens d'en donner semble permettre de les introduire dans les élémens de géométrie. (*)

(*) Le dernier de ces deux théorèmes dépendant de celui d'Euler, doit être, comme lui, passible de toutes les diverses exceptions mentionnées par M. Lhuilier dans le mémoire précédent.

J. D. G.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations des deux théorèmes de statique énoncés à la page 76 de ce volume ;

Par MM. Bérard, G. Fornier, Labrousse, Lambert, Lhuilier, Rochat, Le Grand et Penjon.



Énoncés. *I. La droite qui joint le milieu de l'une quelconque des diagonales d'un quadrilatère à un point de l'autre diagonale de ce quadrilatère qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités que le point d'intersection des deux diagonales est éloigné de son autre extrémité, contient le centre de gravité de l'aire de ce quadrilatère.*

II. Si, dans une pyramide quadrangulaire, on joint, par une droite, le centre de gravité de l'aire du triangle qui, ayant pour base l'une quelconque des diagonales de la base de la pyramide, a même sommet qu'elle, à un point de l'autre diagonale de cette base, qui soit autant éloigné de l'une de ses extrémités que l'intersection des deux diagonales est éloignée de son autre extrémité, cette droite contiendra le centre de gravité du volume de la pyramide.

Les démonstrations de ces deux théorèmes fournies par MM Labrousse, professeur de mathématiques à Montélimart, Lambert, professeur au lycée de Bourges, Rochat et Legrand, professeurs au collége

collége de St-Brieux, et Penjon, professeur au lycée d'Anger, ne diffèrent, pour ainsi dire, que dans l'arrangement des propositions et se réduisent à ce qui suit.

1.° Soit ABCD (fig. 1) un quadrilatère, dont E soit l'intersection des deux diagonales; soit F le milieu de la diagonale BD, et soit portée CE sur l'autre diagonale de A en G; enfin soit joint FG. Il s'agit de démontrer que cette dernière droite contient le centre de gravité de l'aire du quadrilatère ABCD.

Pour cela soient menées FA, FC, et soient coupées ces droites respectivement, en H et I au tiers de leur longueur, à partir du point F; soit enfin menée HI qui, d'après la construction, sera parallèle à AC; et soit K son intersection avec FG.

Les deux triangles BAD et BCD, ayant même base BD, ont leurs aires proportionnelles à leurs hauteurs, ou, ce qui revient au même, dans le rapport de AE à CE, ou encore dans le rapport de CG à AG, ou enfin, à cause des parallèles, dans le rapport de IK à HK; la droite HI est donc coupée en K en raison inverse des aires des triangles BAD et BCD, dont H et I sont, par construction, les centres de gravité respectifs; d'où il résulte, par le principe de la composition des forces, que le point K de FG est le centre de gravité de l'aire du quadrilatère ABCD.

Il est facile de conclure de là que la droite FG et la droite qu'on menerait du milieu de AC à un point situé sur BD comme l'est le point G sur AC, se couperaient réciproquement en K au tiers de leur longueur.

2.° Soient S (fig. 2) le sommet d'une pyramide quadrangulaire, ABCD sa base, dont les deux diagonales se coupent en E; soit F le centre de gravité de l'aire du triangle BSD, et soit portée CE sur AC, de A en G; soit enfin joint FG. Il s'agit de démontrer que cette dernière droite contient le centre de gravité du volume de la pyramide SABCD.

Pour cela soient menées FA, FC, et soient coupées ces droites respectivement en H et I, au quart de leur longueur, à partir du

point F ; soit enfin menée HI qui, d'après la construction, sera parallèle à AC; et soit K le point où cette droite coupe FG.

Les deux tétraèdres BAD et BCD, ayant même base BD, ont leurs volumes proportionnels à leurs hauteurs ou, ce qui revient au même, dans le rapport de AE à CE, ou encore dans le rapport de CG à AG, ou enfin, à cause des parallèles, dans le rapport de IK à HK ; la droite HI est donc coupée en K en raison inverse des volumes des deux tétraèdres ASBD, CSBD, dont H et I sont, par construction, les centres de gravité respectifs ; d'où il résulte, par le principe de la composition des forces, que le point K de FG est le centre de gravité du volume de la pyramide quadrangulaire SABCD.

Il est facile de conclure de là que la droite FG et la droite qui serait menée du centre de gravité de l'aire du triangle ASC à un point situé sur BD de la même manière que le point G est situé sur AC, doivent se couper réciproquement en K au quart de leur longueur.

Les démonstrations fournies par MM. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, G. Fornier, élève du lycée de Nismes, et Lhuilier, professeur à l'académie de Genève, ne présentent également entre elles que de très-légères différences, et se réduisent à ce qui suit.

1.° Les choses étant d'ailleurs dans la figure 3 comme dans la figure 1 ; soit $3p$ la masse du triangle BAD ; il est connu qu'elle pourra être remplacée par trois masses p placées à ses trois sommets. Soit de plus $3q$ la masse du triangle BCD ; cette masse pourra, pareillement, être remplacée par trois masses q, placées à ses trois sommets.

D'après cette décomposition, on aura deux masses $p+q$ placées aux deux extrémités de BD, auxquelles on pourra substituer une masse unique $2(p+q)$ placée au milieu F de cette droite ; on aura de plus deux masses p et q placées respectivement aux deux extrémités A et C de AC, auxquelles on pourra évidemment subs-

tituer une masse $p+q$ située en G ; ce qui prouve, à la fois, que le centre de gravité de tout le système est en quelque point K de FG, et qu'il est au tiers de cette droite, à partir du point F.

2.° Les choses étant d'ailleurs dans la figure 4 comme dans la figure 2 ; soit $4p$ la masse du tétraèdre ASBD ; il est connu qu'elle pourra être remplacée par quatre masses p placées à ses quatre sommets. Soit de plus $4q$ la masse du tétraèdre CSBD ; cette masse pourra pareillement être remplacée par quatre masses q placées à ses quatre sommets.

D'après cette décomposition, on aura trois masses $p+q$ placées aux trois sommets du triangle BSD, auxquelles on pourra substituer une masse unique $3(p+q)$ placée au centre de gravité F de l'aire de ce triangle ; on aura de plus deux masses p et q placées respectivement aux deux extrémités A et C de AC, auxquelles on pourra évidemment substituer une masse unique $p+q$ située en G ; ce qui prouve, à la fois, que le centre de gravité de tout le système est en quelque point K de FG, et qu'il est au quart de cette droite, à partir du point F.

M. Bérard reproduit, à cette occasion, une remarque qu'il avait déjà faite ailleurs (*) : c'est que, par de simples intersections de droites, on peut facilement déterminer le centre de gravité de l'aire d'un polygone quelconque. Qu'il s'agisse, par exemple, de déterminer le centre de gravité de l'aire d'un pentagone ; en décomposant, de deux manières, ce pentagone, par une diagonale, en un triangle et un quadrilatère, et joignant dans chaque cas les centres de gravités des aires des deux figures par une droite ; on obtiendra deux droites qui se couperont au point cherché.

Ces considérations peuvent facilement être étendues à la recherche du centre de gravité du volume des pyramides et par suite à celle du centre de gravité du volume des polyèdres quelconques.

Aux deux théorèmes qui viennent d'être démontrés, M. Lhuilier

---

(*) *Opuscules mathématiques* ; (Paris 1810) page 140.

a ajouté le suivant, dont nous laisserons au lecteur le plaisir de trouver la démonstration.

THÉORÈME. Soit un fuseau composé de deux pyramides ayant une base commune et leurs sommets situés de différens côtés du plan de cette base; et soient joints ces sommets par une droite. Soit pris sur cette droite un point autant distant de l'une de ses extrémités que son intersection avec le plan de la base est éloignée de son autre extrémité. Si l'on joint le point ainsi déterminé au centre de gravité de l'aire de la base commune des deux pyramides, par une droite, le centre de gravité du volume du fuseau sera sur cette droite, et il se trouvera situé au quart de sa longueur, à partir du plan de la base. (*)

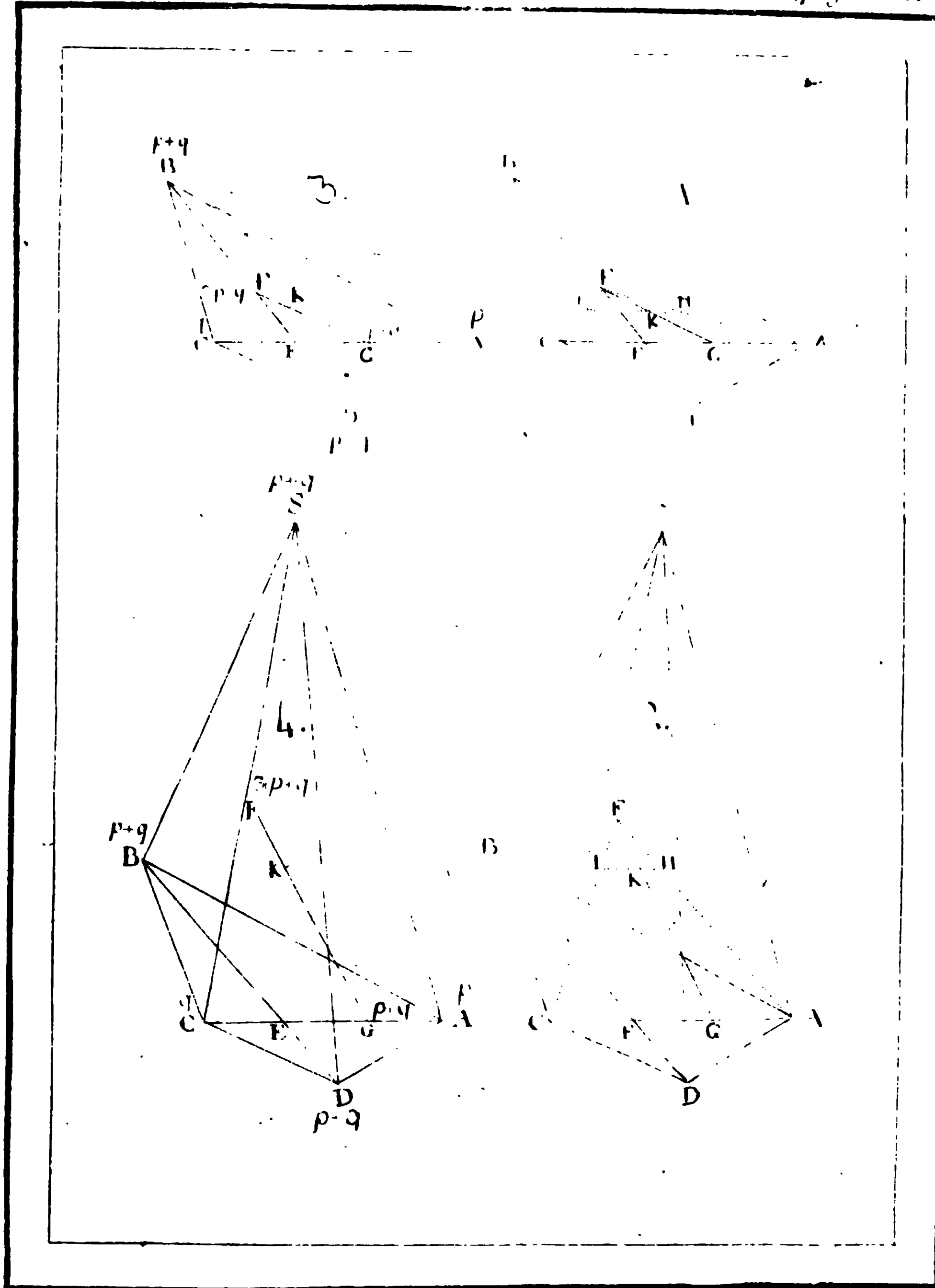
QUESTIONS PROPOSÉES.

Théorèmes de Géométrie.

I. Le plan qui divise l'un des angles dièdre d'un tétraèdre en deux parties égales, partage l'arête opposée en deux segmens proportionnels aux aires des faces correspondantes.

II. La droite qui, partant du sommet d'un tétraèdre, fait des angles égaux avec les trois faces adjacentes, rencontre sa base en un point tel qu'en le considérant comme le sommet commun de trois triangles ayant pour bases les trois côtés de cette base, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux aires des faces correspondantes.

(*) Pendant que ceci s'imprimait, M. Ferriot, docteur ès sciences et professeur de mathématiques au lycée de Besançon a adressé au Rédacteur une démonstration des deux théorèmes. Elle ne diffère pas sensiblement de celle qu'on vient, en premier lieu, de faire connaître.



S. D. G. fecit.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire sur les maxima *et* minima *des fonctions à un nombre quelconque de variables* ;

Présenté à la 1.re classe de l'institut, le 15 avril 1811 ;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



M. Lagrange a fait voir que les conditions assignées par Euler, pour l'existence des *maxima* et *minima* des fonctions à deux variables, étaient insuffisantes, et y a ajouté une nouvelle condition ; de plus, il a étendu cette théorie aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Je me propose de faire voir, dans ce mémoire, 1.° que la nouvelle condition introduite par M. Lagrange exige trop ; 2.° qu'outre les *maxima* et *minima* déterminés qu'on a considérés jusqu'à présent, il peut exister une infinité de *maxima* et *minima*, liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée, et que ce cas a précisément lieu, lorsque les nouvelles conditions assignées par M. Lagrange sont en défaut.

1. Si $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$ devient un *maximum* ou un *minimum* ; pour les valeurs $x_1=a_1$, $x_2=a_2$, $x_3=a_3$, $\ldots x_n=a_n$; on pourra représenter un état voisin de cette fonction par

$$\begin{aligned}\varphi(a_1+\xi_1,a_2+\xi_2,a_3+\xi_3,\ldots a_n+\xi_n)=&A+(B_1\xi_1+B_2\xi_2+B_3\xi_3+\ldots+B_n\xi_n)\\&+\tfrac{1}{2}(C_{1,1}\xi_1^2+C_{2,2}\xi_2^2+C_{3,3}\xi_3^2+\ldots+C_{n,n}\xi_n^2)\\&+2(C_{1,2}\xi_1\xi_2+C_{1,3}\xi_1\xi_3+\ldots+C_{1,n}\xi_1\xi_n)\\&+2(C_{2,3}\xi_2\xi_3+C_{2,4}\xi_2\xi_4+\ldots+C_{2,n}\xi_2\xi_n)\\&+2(C_{3,4}\xi_3\xi_4+C_{3,5}\xi_3\xi_5+\ldots+C_{3,n}\xi_3\xi_n)\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+2(C_{n-2,n-1}\xi_{n-2}\xi_{n-1}+C_{n-2,n}\xi_{n-2}\xi_n)+2C_{n-1,n}\xi_{n-1}\xi_n.\\&+\frac{1}{2.3}\Big(\ldots\ldots\Big)+\ldots\ldots\qquad(1)\end{aligned}$$

Pour que le *maximum* ou *minimum* ait lieu, il faut que le second terme du second membre de cette équation soit nul, indépendamment des valeurs des accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n, qui n'y entrent qu'à la première puissance. De plus, il faut, pour le *minimum*, que le troisième terme, qui contient les combinaisons deux à deux de ces accroissemens, soit toujours *positif*; il doit toujours être négatif pour le *maximum*.

2. En représentant ce troisième terme par $\frac{1}{2}V$ on peut mettre V sous la forme

$$V=\frac{(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2+V_1}{C_{1,1}},$$

$$V_1=\frac{[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)\xi_2+(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})\xi_3+\ldots+(C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n})\xi_n]^2+V_2]}{C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2},$$

$$\begin{aligned}V_2=(\{[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,3}-C_{1,3}^2)-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2]\xi_3+\ldots\\+[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,n}-C_{1,3}C_{1,n})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})(C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n})]\xi_n\}^2\\+V_3):[(C_{1,1}C_{2,2}-C_{1,2}^2)(C_{1,1}C_{3,3}-C_{1,3}^2)-(C_{1,3}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2],\quad(*)\end{aligned}$$

(*) Pour la facilité typographique, on emploie ici le signe (:) pour l'équivalant de *divisé par*, comme dans les rapports géométriques ou par quotiens.

$$V_3=[(D\xi_4+\ldots)^2+V_4]:\{[(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{3,3}-C^2_{1,3})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})^2][(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{4,4}-C^2_{1,4})-(C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4})^2]-[(C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2})(C_{1,1}C_{3,4}-C_{1,3}C_{1,4})-(C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3})(C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4})]^2\}, \quad (*)$$

$V_4=$ ....

....

Les coefficiens des accroissemens ξ_3, ξ_4, ..., dans V_3, V_4, ..., finissent par devenir très-compliqués ; mais, comme ils sont tous très-symétriques, il est aisé d'en assigner la loi, et de les représenter par des symboles indiquant leur génération et pouvant servir à calculer leurs valeurs. En représentant le coefficient de ξ_2, dans V_1, par $\alpha_{2,2}$, ceux de ξ_3, ξ_4, ... ξ_n deviennent $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, ... $\alpha_{2,n}$, et se déduisent d'une manière très-simple de $\alpha_{2,2}=C_{1,1}C_{2,2}-C^2_{1,2}$; il suffit, pour cela, de changer le 2, après la virgule, en 3, 4,...n, et de ne faire ce changement dans le second terme $C^2_{1,2}$ que pour un de ses facteurs; de sorte qu'on aura $\alpha_{2,3}=C_{1,1}C_{2,3}-C_{1,2}C_{1,3}$, $\alpha_{2,4}=C_{1,1}C_{2,4}-C_{1,2}C_{1,4}$,...$\alpha_{2,n}=C_{1,1}C_{2,n}-C_{1,2}C_{1,n}$. On obtient ainsi

$$V_1=\frac{1}{\alpha_{2,2}}[(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n)^2+V_2].$$

Au moyen de cette notation, V_2 devient

$$V_2=\frac{[(\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha^2_{2,3})\xi_3+(\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})\xi_4+\ldots+(\alpha_{2,2}\alpha_{3,n}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,n})\xi_n]^2+V_3}{\alpha_{2,2}\alpha_{3,3}-\alpha^2_{2,3}};$$

c'est-à-dire, de la même forme que V_1 exprimé en C. On pourra donc représenter les coefficiens de cette formule par $\beta_{3,3}$, $\beta_{3,4}$, $\beta_{3,5}$, ... $\beta_{3,n}$, et ces quantités se déduiront de $\beta_{3,3}$, comme $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}$, ... $\alpha_{2,n}$ se déduisent de $\alpha_{2,2}$, de sorte qu'on aura

---

(*) La lettre D est employée ici, par abréviation, pour représenter le dénominateur de la valeur de V_3 ; c'est-à-dire, la quantité qui suit le signe (:) dans cette valeur.

$$\beta_{3,4}=\alpha_{2,2}\alpha_{3,4}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\,,\ \beta_{3,5}=\alpha_{2,2}\alpha_{3,5}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\,,\ldots\ldots\beta_{3,n}$$
$$=\alpha_{2,2}\alpha_{3,n}-\alpha_{2,3}\alpha_{2,n}.$$

En continuant ce raisonnement de la même manière, on démontrera aisément que les termes V, V_1, V_2, V_3,.... V_{n-2}, V_{n-1}, peuvent être mis sous la forme suivante

$$V=\frac{1}{C_{1,1}}\{(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2+V_1\}\,,$$

$$V_1=\frac{1}{\alpha_{2,2}}\{(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n)^2+V_2\}\,,$$

$$V_2=\frac{1}{\beta_{3,3}}\{(\beta_{3,3}\xi_3+\beta_{3,4}\xi_4+\beta_{3,5}\xi_5+\ldots\ldots+\beta_{3,n}\xi_n)^2+V_3\}\,,$$

$$V_3=\frac{1}{\gamma_{4,4}}\{(\gamma_{4,4}\xi_4+\gamma_{4,5}\xi_5+\gamma_{4,6}\xi_6+\ldots\ldots+\gamma_{4,n}\xi_n)^2+V_4\}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$V_{n-2}=\frac{1}{\psi_{n-1,n-1}}\{(\psi_{n-1,n-1}\xi_{n-1}+\psi_{n-1,n}\xi_n)^2+V_{n-1}\}\,,$$

$$V_{n-1}=\frac{1}{\omega_{n,n}}(\omega_{n,n}\xi_n)^2=\omega_{n,n}\xi_n^2\,;$$

où chaque espèce de symbole dérive de la précédente, comme les β dérivent des α, et ceux-ci des C.

En faisant les substitutions successives de ces quantités dans V, on obtient

$$V=\frac{1}{C_{1,1}}(C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n)^2$$

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}}(\alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n)^2$$

+

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}}(\beta_{3,3}\xi_3+\beta_{3,4}\xi_4+\beta_{3,5}\xi_5+\ldots+\beta_{3,n}\xi_n)^2$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}\ldots\psi_{n-1,n-1}}(\psi_{n-1,n-1}\xi_{n-1}+\psi_{n-1,n}\xi_n)^2$$

$$+\frac{\omega_{n,n}}{C_{1,1}\alpha_{2,2}\beta_{3,3}\ldots\psi_{n-1,n-1}}\xi_n^2. \qquad (2)$$

3. En faisant, pour abréger

$$U=B_1\xi_1+B_2\xi_2+B_3\xi_3+\ldots+B_n\xi_n\,,$$

les conditions, pour le *minimum*, se réduisent à

$$U=0\,,\qquad V>0\,,$$

et celles, pour le *maximum*, à

$$U=0\,,\qquad V<0\,;$$

le tout indépendamment des valeurs particulières que peuvent recevoir les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n. On conclut de là les deux séries de conditions suivantes :

$$B_1=0\,,\quad B_2=0\,,\quad B_3=0\,,\ldots.B_n=0\,, \qquad (4)$$

$$C_{1,1}\gtrless 0\,,\quad \alpha_{2,2}>0\,,\quad \beta_{3,3}>0\,,\ldots.\omega_{n,n}>0\,; \qquad (5)$$

le signe supérieur de $C_{1,1}$ ayant lieu pour le *minimum*, et le signe inférieur pour le *maximum*.

4. Les conditions (4) sont toujours nécessaires, pour l'existence du *maximum* ou *minimum*, et ne peuvent être remplacées par une autre série de conditions ; mais il n'en est pas de même des conditions (5), qui dépendent entièrement de la manière d'ordonner les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n entre eux. $C_{1,1}$ peut être remplacé par $C_{2,2}$, $C_{3,3}$, $C_{n,n}$, ... et recevoir autant de valeurs différentes qu'il y a de variables ; $\alpha_{2,2}$ peut recevoir autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons deux à deux entre les variables ; le nombre des valeurs différentes de $\beta_{3,3}$ est égal à celui de leurs combinaisons trois à trois ; et ainsi de suite.

Examinons, d'après cela, les différentes circonstances qui peuvent avoir lieu, dans ces deux séries de conditions.

5. Jusqu'à présent, on n'avait considéré les équations (4) que comme ayant lieu indépendamment les unes des autres, de manière que les valeurs des variables correspondant au *maximum* ou *minimum* étaient entièrement déterminées ; mais il s'en faut de beaucoup que cet état déterminé des variables soit nécessaire pour l'existence du *maximum* ou *minimum* ; nous allons voir, au contraire, qu'il peut avoir lieu, avec la plus grande indétermination possible entre les variables ; et nous examinerons comment le plus ou le moins d'indétermination entre elles influe sur les conditions (5).

6. Les équations (4) sont évidemment satisfaites par chacun des systèmes suivans

$$\lambda=0\,;\; B_1=l_1\lambda\,,\; B_2=l_2\lambda\,,\; B_3=l_3\lambda\,,\ldots\ldots B_n=l_n\lambda\,; \qquad (6)$$

$$\lambda=0,\; \mu=0\,;\; B_1=l_1\lambda+m_1\mu,\; B_2=l_2\lambda+m_2\mu,\ldots B_n=l_n\lambda+m_n\mu\,; \qquad (7)$$

$$\lambda=0\,,\; \mu=0\,,\; \varpi=0\,;\; B_1=l_1\lambda+m_1\mu+p_1\varpi\,,\; B_2=l_2\lambda+m_2\mu+p_2\varpi\,,$$
$$\ldots\ldots\; B_n=l_n\lambda+m_n\mu+p_n\varpi\,; \qquad (8)$$

. . . .

où λ, μ, ϖ, ..., l_1, m_1, p_1, ... l_2, m_2, p_2, ..., ... peuvent être des fonctions quelconques des variables qui entrent dans la fonction proposée.

Si l'on différentie les équations (6), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, $C_{1,3}$, ... $C_{1,n}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$, $C_{2,4}$, ... $C_{2,n}$, $C_{3,3}$, ... $C_{n,n}$, on trouve, entre ces quantités, les relations $\alpha_{2,2}=0$, $\alpha_{2,3}=0$, $\alpha_{2,4}=0$, ... $\alpha_{2,n}=0$, et par conséquent tous les β, γ, ... ψ, ω, s'évanouissent aussi. L'équation (2) se réduit donc à son premier terme, et les conditions (5) à $C_{1,1} \gtrless 0$. Les conditions du *minimum* ou *maximum* seront donc, dans ce cas,

$$\lambda=0\,,\quad C_{1,1} \gtrless 0\,; \qquad (9)$$

et toutes les valeurs des variables satisfaisant à l'équation $\lambda=0$, donnent un *maximum* ou un *minimum*, selon que $C_{1,1}$ est *négatif* ou *positif*.

Cependant, dans ce cas, la valeur de V peut devenir nulle, en supposant entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n la relation

$$C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n=0. \qquad (10)$$

On pourrait donc croire que la condition du *maximum* ou *minimum* n'est pas satisfaite généralement. Mais il est aisé de voir que l'équation (10) n'est autre chose que l'équation différentielle $l_1 d\lambda=0$, dans laquelle on a substitué pour dx_1, dx_2, dx_3, ... dx_n les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n; elle est donc une suite nécessaire de la supposition que nous avons faite, et fait voir que, pour toute autre relation entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n, la quantité V devient positive pour le *minimum* et négative pour le *maximum*. Le *maximum* ou *minimum* a donc réellement lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant à la relation $\lambda=0$.

En différentiant de même les équations (7), pour en tirer les valeurs de $C_{1,1}$, $C_{1,2}$, ... $C_{1,n}$, $C_{2,2}$, $C_{2,3}$, ... $C_{2,n}$, $C_{3,3}$, ..., .. $C_{n,n}$, on trouvera, entre ces quantités, les relations $\beta_{3,3}=0$, $\beta_{3,4}=0$, $\beta_{3,5}=0$, ... $\beta_{3,n}=0$, et tous les γ, δ, ... ψ, ω, s'évanouiront en même temps. L'équation (2) se réduira à ses deux premiers termes, et les conditions du *minimum* ou *maximum* deviendront

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ,\ C_{1,1}\gtrless 0\ ,\ \alpha_{2,2}>0. \qquad (11)$$

Toutes les valeurs des variables, satisfaisant aux relations $\lambda=0$, $\mu=0$, donneront donc un *minimum* ou *maximum*, si les deux dernières conditions (11) sont satisfaites.

La valeur de V peut devenir nulle, dans ce cas, et faire présumer que le *minimum* ou *maximum* n'a pas lieu généralement, en supposant entre les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ... ξ_n les relations simultanées

$$\left.\begin{array}{l} C_{1,1}\xi_1+C_{1,2}\xi_2+C_{1,3}\xi_3+\ldots\ldots+C_{1,n}\xi_n=0\ , \\ \alpha_{2,2}\xi_2+\alpha_{2,3}\xi_3+\alpha_{2,4}\xi_4+\ldots\ldots+\alpha_{2,n}\xi_n=0\ ; \end{array}\right\} \qquad (12)$$

mais il n'est pas difficile de se convaincre que le système de ces deux équations équivaut à celui des deux équations différentielles $d\lambda=0$, $d\mu=0$, dans lesquelles on aurait substitué les accroissemens ξ_1, ξ_2,

$\xi_3, \ldots \xi_n$ à la place de dx_1, dx_2, dx_3, ... dx_n ; il est donc encore une suite nécessaire de notre supposition, et fait voir que le *minimum* ou *maximum* a lieu pour toutes les valeurs des variables satisfaisant aux relations (11).

On trouverait, de la même manière, que les conditions du *minimum* ou *maximum*, pour le système (8) deviennent

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ,\ \varpi=0\ ;\ C_{1,1}\gtrless 0\ ,\ \alpha_{2,2}>0\ ,\ \beta_{3,3}>0. \qquad (13)$$

Il n'est pas difficile maintenant d'étendre ces conclusions à un nombre quelconque de facteurs qui affecteraient les valeurs de B_1, B_2, B_3, ... B_n.

7. Dans ce qui précède, nous avons supposé que les facteurs λ, μ, ϖ, ... affectaient tous les termes de U; ce qui a fait disparaître plusieurs quarrés en entier, dans la valeur de V. Mais, si l'on suppose que ces facteurs n'affectent que quelques termes de U, il ne disparaîtra plus de quarrés entiers dans la valeur de V, mais seulement quelques-uns de leurs termes. Ainsi, si l'on a,

$$\lambda=0\ ,\ \mu=0\ ;\ B_1=l_1\lambda\ ,\ B_2=l_2\lambda\ ,\ B_3=m_3\mu\ ,\ B_4=m_4\mu\ ,$$
$$B_5=m_5\mu\ ,\ B_6=0\ ,\ B_7=0, \ldots . B_n=0\ ; \qquad (14)$$

on trouvera $\alpha_{2,2}=0$, $\alpha_{4,4}=0$, $\alpha_{4,5}=0$, $\beta_{5,5}=0$.

Il se présente ici une difficulté très-sérieuse, qu'il est nécessaire de lever pour assurer notre théorie. En substituant les valeurs précédentes dans celles de V, tous les termes après le premier deviennent infinis par le facteur commun $\frac{1}{\alpha_{2,2}}$; on ne peut donc plus rien conclure de cette valeur, pour l'existence du *maximum* ou *minimum*. Dans ce cas, il faut avoir recours à l'observation que nous avons faite au n.° 4, et ordonner les accroissemens ξ_1, ξ_2, ξ_3, ...ξ_n entre eux, de manière que les premiers termes des quarrés qui composeront le nouveau développement de V ne s'évanouissent pas; (ce que l'on démontre aisément être toujours possible); alors il n'y a plus, dans les quarrés successifs qui forment le développement de V, que quelques termes qui s'évanouissent. Les conditions (5) que l'on tire de ce nouveau développement de V subsisteront donc

en entier ; la seule différence qu'il y aura, dans ce cas, consiste en ce que $\alpha_{2,2}$, $\beta_{3,3}$, $\gamma_{4,4}$,..... ne peuvent plus recevoir autant de valeurs différentes que nous leur en avons assignées au n.° 4. La réduction du nombre de ces valeurs dépend de celui des facteurs, et de celui des coefficiens de V affectés par chacun d'eux.

Le même raisonnement et des conclusions analogues sont applicables au cas suivant et à tous les autres semblables.

$$\lambda=0\,,\ \mu=0\,,\ \varpi=0\,;\ B_1=l_1\lambda+m_1\mu,\ B_2=l_2\lambda+m_2\mu,\ B_3=l_3\lambda+m_3\mu,\ B_4=l_4\lambda+p_4\varpi\,,\ B_5=m_5\mu+p_5\varpi\,,\ B_6=0\,,\ B_7=0,\ldots.\ B_n=0. \quad (15)$$

....

8. Il résulte de cette théorie, 1.° qu'outre les *maxima* et les *minima* déterminés des fonctions à plusieurs variables, qu'on a considérés jusqu'à présent, il peut exister une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés, liés entre eux par une ou plusieurs relations entre les variables de la fonction proposée ; 2.° que, pour l'existence de ces *maxima* ou *minima* indéterminés, il faut que les coefficiens de la valeur de U s'évanouissent, soit par un ou plusieurs facteurs communs à tous, soit par un ou plusieurs facteurs affectant seulement quelques-uns d'entre eux, tandis que les coefficiens restans peuvent s'évanouir d'eux-mêmes ; 3.° que, pour le premier des deux cas précédens, les conditions (5) se réduisent à la première, quand tous les coefficiens de la valeur de U s'évanouissent, par un seul facteur commun ; et qu'elles se réduisent aux deux premières, aux trois premières, etc., quand tous les coefficiens s'évanouissent par deux facteurs, trois facteurs, etc., communs à tous ; 4.° que, dans le second cas, toutes les conditions (5) ont lieu, mais qu'elles ne peuvent plus alors être remplacées par le nombre de conditions équivalentes que nous avons indiquées au n.° 4 ; 5.° enfin, que cette théorie est nécessaire pour compléter celle des *maxima* et *minima* des fonctions de plusieurs variables.

9. J'ai donné, dans une note précédente, un essai de cette théorie, appliquée aux surfaces courbes (*), et j'y ai fait voir qu'il peut y

(*) Voyez la page 132 de ce volume.

avoir sur les surfaces une infinité de *maxima* et *minima* indéterminés, liés entre eux par une courbe continue. En l'appliquant à la mécanique, on peut trouver des fonctions du temps qui deviennent des *maxima* ou *minima*, pour tous les points d'une surface courbe ou d'une courbe à double courbure, selon que tous les coefficiens de U s'évanouiront, par un ou par deux facteurs communs.

Metz, le 2 mai 1810.

VARIÉTÉS.

Sur une réclamation de M. Hoëne-Wronski, contre quelques articles de ce recueil;

Par M. Gergonne.

Par une lettre insérée dans le *Moniteur* du 22 novembre dernier, M. Wronski se plaint de l'espèce de *doute* que j'ai manifesté, aux pages 51 et 137 de ce volume, sur le succès de la méthode qu'il a publiée, pour la résolution des équations algébriques de tous les degrés, et du parallèle que j'ai cherché à établir entre cette méthode et celle de Bezout. Il me reproche d'avoir, dans la vue d'éviter les longueurs que, *suivant moi*, implique sa méthode, indiqué un autre procédé *que j'appelle plus court et peut-être plus direct*. Ces objections, suivant M. Wronski, n'étant nullement fondées, il avait d'abord gardé le silence : pensant que la réflexion me ferait revenir de moi-même, sur un jugement trop précipité; mais voyant, par l'article inséré à la page 137, que je persistais dans l'opinion que j'avais d'abord émise; que même je cherchais à l'étayer encore, par de nouvelles considérations; et que sur-tout je regardais ma méthode comme étant de nature à pouvoir décider la question d'une manière péremptoire; il a cru devoir, par quelques réflexions, prémunir le public contre mes insinuations.

Dans ces réflexions, M. Wronski croit devoir distinguer la *forme* des racines des équations (conjecturée, dit-il, depuis long-temps) de leur *nature* qu'il croit avoir découvert le premier; et il pense que c'est principalement à cette connaissance qu'il est redevable du succès de ses recherches. Il regarde la formation de ce qu'il a appelé *équations fondamentales*, comme l'unique moyen de parvenir au but; et déclare, en conséquence, que les diverses méthodes qu'on pourra proposer à l'avenir ne différeront entre elles et de la sienne que par la manière d'opérer sur ces équations, pour parvenir *à la réduite*. Il donne enfin un aperçu des causes qui, jusqu'ici, se sont opposées au succès des méthodes de résolution des équations, au-delà du quatrième degré. (*)

M. Wronski termine en annonçant que, ces éclaircissemens étant les seuls qu'il puisse fournir sur sa méthode, avant d'en avoir publié la théorie; les observations qui lui seront faites ultérieurement sur ce sujet, *si elles ne sont pas légitimées par des calculs rigoureux*, prouvant, suivant lui, *des vues tout-à-fait étrangères à la science*, il est résolu de n'y *donner aucune attention*.

Je dois d'abord témoigner ma surprise de ce qu'ayant ou croyant avoir à se plaindre de quelques articles des *Annales de mathématiques*, M. Wronski n'ait pas adressé sa réclamation au Rédacteur même de ce recueil. M'aurait-il donc supposé assez peu équitable ou assez maladroit pour refuser de rendre cette réclamation publique? ou plutôt ne m'autorise-t-il pas à soupçonner que, sachant bien que les *Annales* ne sont lues que par des géomètres, il a voulu décliner de leur juridiction, et en appeler de leur jugement à un tribunal très-respectable sans doute, mais très-peu compétent dans ces matières.

Personne, si ce n'est peut-être M. Wronski, n'a pu prendre le change, sur l'opinion que j'ai manifestée aux pages déjà citées de ce volume; chacun a compris clairement que ce que j'énonçais sous la forme du *doute*, était chez moi le résultat d'une entière *conviction*;

(*) J'ai donné quelques développemens, sur ce sujet, dans le *Recueil de l'académie du Gard* pour 1808, pages 265 et suivantes.

et que, si je n'avais pas mis, en titre de mes articles : *RÉFUTATION de la méthode proposée par M. WRONSKI, etc.*, c'était par pure courtoisie ; que c'était là un de ces ménagemens que prescrit l'urbanité française, mais qui paraissent être tout à fait étrangers à M. Wronski. Il prétend, dans son ouvrage, avoir donné le premier une méthode de résolution des équations qu'on ne soit pas obligé de modifier pour le quatrième degré ; j'ai dû observer que Bezout l'avait fait avant lui ; et qu'en outre ce géomètre avait réparti les racines de l'unité, entre les diverses valeurs de l'inconnue, de la manière qu'il le fait lui-même. Quant à la distinction que M. Wronski cherche à établir, entre la *forme* et la *nature* des racines, j'avoue que je ne la comprends pas bien nettement, et qu'il me semble même que la forme des racines d'une équation en détermine aussi la nature. Si pourtant il entend par là qu'il a été le premier à apercevoir que chaque racine devait renfermer des radicaux de son degré et de tous les degrés inférieurs, il se trompe encore en ceci ; car Bezout, en particulier, a pris beaucoup de soin à mettre cette vérité dans tout son jour.

Je n'ai pas seulement donné la méthode que j'ai cru devoir substituer à celle de M. Wronski comme *plus courte et plus directe* ; je l'ai principalement présentée comme *portant avec elle sa démonstration*, c'est-à-dire, en d'autres termes, comme n'étant point une énigme. Du reste, partant du même point que M. Wronski, tendant au même but que lui, admettant tout ce qu'il admet et uniquement ce qu'il admet, ne faisant enfin que des *calculs rigoureux* et conformes à la composition connue des équations ; tout le monde conviendra, je pense, que, si mon procédé n'obtient pas de succès, le sien ne saurait en obtenir davantage ; à moins cependant qu'il n'ait découvert, entre les racines de l'unité, des relations inaperçues jusqu'à lui ; ce qu'il ferait bien alors de nous révéler.

M. Wronski, en se retranchant derrière ses *équations fondamentales*, prend, en effet, un poste très-sûr, dans lequel il y a peu d'apparence que personne soit jamais tenté de l'aller forcer. Ma méthode,

méthode, au contraire, l'oblige à combattre à découvert, et voilà sans doute pourquoi il la rejette.

En résumé, que M. Wronski déduise, soit de sa méthode, soit de toute autre qu'il lui plaira d'employer, et qu'il pourra même tenir secrète, si cela lui convient, une réduite rationnelle pour le 5.me degré, conditionnée comme il annonce qu'elle doit l'être, et dès-lors je m'avoue vaincu; j'ajoute que, pour l'intérêt de la science, je désire vivement que la provocation solennelle que je lui adresse tourne à ma confusion et à sa gloire. Il pourra à la vérité paraître humiliant à un esprit aussi supérieur que le sien, de s'abaisser à des détails d'application, dignes tout au plus des Euler, des Vandermonde et des Lagrange; aussi sera-ce là l'épreuve unique que je réclamerai de sa complaisance; mais encore faut-il bien qu'il justifie sa mission.

Que si, au contraire, M. Wronski persiste à s'envelopper de ténèbres, et à ne nous offrir que des promesses; s'il se borne, ainsi qu'il l'a fait jusqu'ici, à expliquer des énigmes par d'autres énigmes; si en un mot il néglige de *légitimer ses assertions par des calculs rigoureux*; je serai autorisé à penser qu'il écrit dans *des vues tout à fait étrangères à la science*, et fondé conséquemment à ne plus *donner*, à l'avenir, *aucune attention* à ses productions.

DYNAMIQUE.

Théorèmes nouveaux sur la rotation des corps solides;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie,



Au Rédacteur des *Annales*;

Monsieur,

Je me suis occupé, depuis quelque temps, d'un travail que je comptais faire paraître dans vos *Annales*, sur le mouvement de

rotation d'un corps solide ; mais le mémoire est devenu trop volumineux pour que je puisse, cette fois, sans indiscrétion, profiter de l'offre obligeante que vous m'avez faite d'y insérer mes petites productions. Je me vois donc obligé de le faire imprimer séparément ; mais, pour mettre, à l'avance, les géomètres en possession des principaux résultats que j'ai obtenus, je vais les transcrire ici, en vous priant de vouloir bien insérer cette lettre dans votre intéressant recueil.

I. Dans le mouvement de rotation d'un corps solide, qui n'est sollicité que par des forces constantes, l'axe instantané décrit toujours soit un cône elliptique autour de l'un des axes principaux, *maximum* ou *minimum* (*), soit un plan passant par l'axe principal moyen. (**)

II. Tandis que l'axe instantané de rotation décrit un cône elliptique autour de l'un des axes principaux, *maximum* ou *minimum*, cet axe principal lui-même décrit un autre cône elliptique autour de l'axe du couple d'impulsion primitive (***) ; ou bien, tandis que l'axe instantané décrit un plan passant par l'axe principal moyen, cet axe décrit lui-même un plan passant par l'axe du couple d'impulsion primitive.

III. Le mouvement de l'axe instantané, autour de l'axe du couple d'impulsion primitive, est donc composé de deux oscillations ellipticoconiques simultanées. Ces deux oscillations se composent en une seule, dont la nature dépend du rapport qui existe entre les axes des sections faites dans les deux cônes elliptiques, et de la durée de chacune de ces deux oscillations entières. Si ces deux oscillations sont synchrônes, l'oscillation résultante le sera aussi, et rentrera en

(*) Je nomme, pour abréger, axe principal *maximum* ou *minimum*, celui par rapport auquel le moment d'inertie est un *maximum* ou un *minimum*.

(**) Cette proposition est due à M. Dubuat, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.

(***) J'emploie ici le mot *couple* dans le sens qu'y a attaché M. Poinsot, pour simplifier les expressions.

elle-même, à la fin de chaque oscillation entière. Si les durées des deux oscillations elliptiques ne sont pas égales, mais sont entre elles dans un rapport commensurable, l'oscillation résultante rentrera en elle-même au bout d'un nombre d'oscillation déterminé par ce rapport, Enfin, si les durées des deux oscillations elliptiques sont entre elles dans un rapport incommensurable, l'axe instantané oscillera autour de l'axe du couple d'impulsion primitive, en décrivant un cône qui ne se fermera jamais.

IV. Si, pour chaque position de l'axe instantané, on prend, sur sa direction, une longueur proportionnelle à la vitesse de rotation, pour représenter cette vitesse, à chaque instant; l'extrémité de l'axe instantané, ainsi déterminée, décrira toujours une courbe plane, située dans un plan parallèle à celui du couple d'impulsion primitive, quelle que soit l'oscillation de cet axe.

V. Lorsque le corps commence à tourner autour d'un axe principal, *maximum* ou *minimum*, cet axe coïncide avec l'axe du couple d'impulsion primitive, et le corps continue toujours à tourner autour de cet axe; ce qui n'a pas nécessairement lieu pour l'axe principal moyen. Cet axe principal ne jouit donc pas, comme les deux autres, de la propriété d'être nécessairement un axe permanent de rotation.

VI. Je démontre (contrairement à une proposition de MM. Laplace et Poisson) que, bien qu'un corps ait commencé à tourner autour d'un axe très-voisin d'un axe principal, *maximum* ou *minimum*, il peut, dans la suite du mouvement, s'en écarter d'aussi près qu'on voudra d'un angle droit.

VII. Je fais voir que les solutions, données par d'Alembert et par M. Poisson, du problème de la rotation d'un corps, sont incomplettes, et ne résolvent que le cas d'un mouvement uniforme autour d'un axe principal.

VIII. Je determine toutes les constantes du problème, d'après les circonstances initiales du mouvement, et je donne les valeurs définitives des coordonnées d'un point quelconque, après le temps t, en coordonnées initiales et en fonctions du temps; de sorte que,

dans chaque cas particulier, il ne reste que des substitutions et deux intégrations à effectuer.

Quant au cas de deux momens d'inertie égaux, je le résous complètement, et en quantités finies. J'assigne de plus, pour ce cas, la condition nécessaire pour que le corps revienne à la même position, et l'époque à laquelle il y reviendra.

IX. Enfin, je discute les *maxima* et *minima* dont cette question est susceptible, et il résulte de cette discussion,

1.° Que, quelles que soient les circonstances initiales du mouvement, la vitesse angulaire totale a toujours une valeur *maximum* et une valeur *minimum*, et que ces *maxima* et *minima* ont toujours lieu, quand l'axe instantané passe par le plan des axes principaux.

2.° Que le *maximum* a lieu, quand l'axe instantané passe par le plan des axes principaux, *maximum* et *minimum*, et qu'alors les vitesses angulaires partielles, autour de ces deux axes, sont aussi des *maxima*, tandis que celle autour de l'axe principal moyen est nulle.

3.° Que le *minimum* a lieu, quand l'axe instantané passe par le plan de l'axe principal moyen et de celui autour duquel l'axe instantané oscille, et qu'alors la vitesse angulaire partielle autour de l'axe principal moyen est à son *maximum*, et celles autour des deux autres axes principaux à leur *minimum*; l'une d'elles étant nulle, savoir, celle autour de l'axe principal qui n'est pas l'axe du cône décrit par l'axe instantané.

4.° Que, dans le cas particulier où l'axe instantané se meut dans un plan passant par l'axe principal moyen, le *minimum* a lieu, quand l'axe instantané coïncide avec cet axe principal, et qu'alors la vitesse angulaire partielle autour du même axe principal est à son *maximum*, tandis que celles autour des deux autres axes principaux sont nulles.

Tels sont les principaux résultats que présente mon travail; je pense qu'ils pourront exciter l'attention des géomètres, tant par leur intérêt propre que par leur nouveauté.

Agréez, etc.

Metz, le 18 de novembre 1812.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Recherches de quelques formules appartenant à la théorie des combinaisons ;

En réponse à la dernière des deux questions proposées à la page 104 de ce volume ;

Par MM. Le Grand et Rochat, professeurs de mathématiques à St-Brieux.



Des lettres a, b, c, d,....., au nombre de m, étant données ; on sait qu'en les prenant n à n, de toutes les manières possibles, elles donnent un nombre de produits différens exprimé par

$$\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.....\frac{m-n+1}{n}. \qquad (A)$$

Concevons qu'on ait formé tous ces différens produits et que, dans chacun d'eux, on ait disposé les facteurs suivant l'ordre alphabétique, du premier au dernier ; comme dans chacun d'eux il manquera $m-n$ des lettres a, b, c, d,...., les lettres qui le composeront ne se succèderont pas toutes consécutivement, en sorte qu'un de ces produits, pris au hasard, pourra présenter d'abord un certain nombre de lettres consécutives ; puis un autre nombre de lettres aussi consécutives entre elles, mais non consécutives aux premières ; puis encore un autre nombre de lettres consécutives entre elles, mais non consécutives à celles qui composeront la seconde partie : et ainsi de suite. Soit par exemple, le produit

$$abdefhikl\,, \quad \text{en l'écrivant ainsi} \quad ab.def.hikl\,,$$

on voit qu'il est composé de trois facteurs, lesquels sont eux-mêmes des produits dont les facteurs sont consécutifs.

A l'avenir nous considérerons comme produits d'une même *classe* tous ceux qui, décomposés comme nous venons de le faire dans le précédent exemple, présenteront le même nombre de séries de facteurs consécutifs; et un produit sera dit de première classe si tous ses facteurs sont consécutifs, de deuxième classe s'il est formé de plusieurs facteurs consécutifs, et de plusieurs autres facteurs aussi consécutifs entre eux, mais non consécutifs aux premiers; un produit sera dit de troisième classe, s'il présente trois séries de facteurs consécutifs, dans chacune d'elles, mais non consécutifs d'une série à l'autre; et ainsi de suite.

Nous diviserons ensuite les produits d'une même classe en *genres*, en appelant produits d'un même genre, ceux qui non seulement renfermeront un même nombre de séries de facteurs consécutifs, mais qui de plus seront tels que chaque série, dans l'un, aura autant de facteurs qu'une série de l'autre. Ainsi, d'après cette définition, les deux produits de même classe

$$ab.def.hikl\,, \qquad abc.ef.hikl\,,$$

sont du même genre, parce que, dans chacun d'eux, il y a une série de deux facteurs, une série de trois facteurs et une de quatre.

Enfin, deux produits d'un même genre seront dits de même *espèce*, si les diverses séries de facteurs consécutifs qui les composent, considérées uniquement par rapport au nombre de leurs facteurs, y sont rangées dans le même ordre; tels sont, par exemple, les deux produits

$$ab,defg.ik\,, \qquad bc.efgh.kl.$$

A l'avenir, pour plus de clarté et de simplicité, nous indiquerons les produits dans lesquels il se trouvera des séries de α, β, γ, ... facteurs consécutifs, en écrivant les lettres α, β, γ, ..., séparées par des virgules, entre des crochets, et les plaçant suivant le rang des séries, de la première à la dernière; ainsi, par exemple, le symbole $[\gamma, \alpha, \theta, \lambda]$ désignera un produit de quatrième classe dans lequel la première série aura γ facteurs, la seconde α, la troisième θ et la quatrième λ. On voit d'après cela, que les produits ...:

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda] \quad , \qquad [\beta, \lambda, \delta, \varphi] \ ,$$

sont de même classe, sans être de même genre ; que les produits

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda] \quad , \qquad [\lambda, \gamma, \alpha, \theta] \ ,$$

sont à la fois de même classe et de même genre ; qu'enfin tous les produits renfermés dans l'expression symbolique

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda] \ ,$$

sont, à la fois de même classe, de même genre et de même espèce.

Ces préliminaires établis, l'objet que nous nous proposons ici est de déterminer, parmi tous les produits de n facteurs qu'on peut faire avec m lettres données, 1.° combien il s'y en trouve d'une classe déterminée quelconque ; 2.° combien, dans une même classe, il s'y en trouve d'un genre déterminé quelconque ; 3.° enfin combien dans un même genre, il s'y en trouve d'une espèce déterminée quelconque.

Occupons-nous d'abord de la recherche du nombre des produits d'une même classe. Soit, en général, désigné par C_p le nombre des produits de la classe p ; c'est-à-dire, le nombre des produits dans lesquels il entre p séries de facteurs consécutifs.

D'abord, pour les produits de première classe, ou de n lettres consécutives, on voit que chacune des lettres a, b, c,,..., excepté les $n-1$ dernières, peut être combinée avec les $n-1$ lettres qui la suivent immédiatement ; en sorte qu'on doit avoir

$$C_1=\frac{m-n+1}{1}\,.$$

Pour parvenir à l'expression de C_2, c'est-à-dire, du nombre des produits de la seconde classe, désignons-les par $[\alpha, n-\alpha]$ et cherchons d'abord ceux d'entre eux qui renferment la lettre a. Pour les former, il faudra d'abord joindre à a les $\alpha-1$ lettres qui la suivent consécutivement ; et, comme la lettre qui suivra immédiatement la dernière de ce produit ne pourra être employée, on ne pourra lui adjoindre que les produits de première classe qu'il sera possible de former

avec les $m-\alpha-1$ lettres restantes, en les prenant $n-\alpha$ à $n-\alpha$; le nombre de ces derniers produits, et conséquemment le nombre total des produits de deuxième classe qui doivent renfermer a se trouvera donc, en changeant m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$, dans la précédente formule; ce qui donnera $m-n$ pour le nombre des produits de la forme $[\alpha, n-\alpha]$ où entre la lettre a; faisant donc successivement $\alpha=1, 2, \ldots n-1$, on aura évidemment, pour le nombre total des produits de seconde classe où entre a

$$(n-1)(m-n).$$

Ayant fait ainsi de la lettre a tout l'emploi que la nature de la question peut permettre, on déterminera le nombre des produits de seconde classe où elle n'entre pas, mais où entre b, en cherchant combien on peut faire de produits de cette classe avec $m-1$ lettres; ce qui donnera

$$(n-1)(m-n-1)\ ;$$

on trouvera pareillement que le nombre de ceux dans lesquels il n'entre ni a ni b, mais qui contiennent c est

$$(n-1)(m-n-2)\ ;$$

et ainsi de suite, en sorte qu'on aura, pour le nombre total des produits de la seconde classe,

$$C_2=(n-1)[(m-n)+(m-n-1)+(m-n-2)\ldots\ldots+2+1]\ ;$$

c'est-à-dire,

$$C_2=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}.$$

Passons aux produits de troisième classe. Désignons toujours par α le nombre des facteurs qui composent la première série, et cherchons d'abord ceux de ces produits qui renferment le facteur a. Il faudra comme ci-dessus, écrire d'abord à la droite de cette lettre les $\alpha-1$ lettres qui la suivent consécutivement, supprimer la $(\alpha+1)^{me}$ lettre et faire tous les produits de seconde classe que peuvent fournir les $m-\alpha-1$ lettres restantes, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$; changeant donc m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$ dans l'expression de C_2, il viendra

pour

pour le nombre des produits de troisième classe où entre a et où la première série contient α facteurs,

$$\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}\cdot(n-\alpha-1)\;;$$

faisant donc successivement $\alpha=1, 2, 3 \ldots\ldots n-2$, on aura, pour la totalité de ceux des produits de la troisième classe dont a fait partie

$$\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}[(n-2)+(n-3)+(n-4)\ldots+2+1]$$
$$=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}.$$

On en conclura le nombre de ceux qui, ne renfermant pas a, renferment b, le nombre de ceux qui, ne renfermant ni a ni b, renferment c, et ainsi de suite, en y changeant successivement m en $m-1$, $m-2, \ldots\ldots n+2$, ce qui donnera

$$C_3=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{1}{2}[(m-n)(m-n-1)+(m-n-1)(m-n-2)$$
$$+\ldots\ldots 3.2+2.1],$$

ou en sommant la série, (*)

$$C_3=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}.$$

On aperçoit déjà facilement la loi de ces résultats, et l'induction conduit à poser généralement

$$C_p=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\ldots\frac{n-p+1}{p-1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\ldots\frac{m-n-p+2}{p}.$$

cette induction se vérifie d'ailleurs par un raisonnement très-familier aux analistes, et sur lequel, pour cette raison, nous croyons superflu d'insister.

Il est clair que le nombre total des produits n à n que peuvent fournir les m lettres a, b, c, ... est égal à la somme des nombres qui expriment combien il y en a de chaque classe ; en sorte qu'on doit avoir

(*) Voyez, pour la sommation de cette série, la page 60 de ce volume.

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\frac{m-n+1}{n}=C_1+C_2+C_3+\ldots+C_p+\ldots+C_n\,;$$

mettant, dans cette équation, pour C_1, C_2, C_3, ... C_p, ... C_n leurs valeurs, on parviendra à ce résultat qui, indépendamment de la théorie des combinaisons, présente un fait analitique assez remarquable

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}$$

$$=\frac{m-n+1}{1}$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-p+1}{p-1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\frac{m-2n+2}{n}.$$

Nous observerons, en passant, que le dernier terme du second membre de cette équation exprimant combien, parmi les produits n à n, il s'en trouve qui ne contiennent point de lettres consécutives, résout conséquemment la question énoncée à la page 60 de ce volume.

Examinons présentement combien il peut y avoir, dans chaque classe, de produits de chaque genre et de chaque espèce.

Convenons de désigner généralement par G_p le nombre des produits d'un genre donné qui se trouvent dans la classe p, et par E_p le nombre de ceux d'une espèce donnée qui se trouvent dans un genre donné, appartenant à la même classe p.

Il est d'abord évident que tous les produits de la première classe sont, à la fois, de même genre et de même espèce, en sorte qu'on a

$$G_1=\frac{m-n+1}{1}\ ,\quad E_1=\frac{m-n+1}{1}\ .$$

Passons aux produits de la seconde classe ; considérons en particulier ceux de l'espèce $[\alpha, n-\alpha]$, et voyons d'abord combien il y a de ces produits qui renferment la lettre a. Cette lettre, suivie des $\alpha-1$ qui lui succèdent dans l'ordre alphabétique, devant être combinée avec les produits de première classe que fournissent les $m-\alpha-1$ dernières lettres, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$; il faudra, pour avoir le nombre des produits de cette espèce, changer, dans C_1, G_1 ou E_1, m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$, ce qui donnera $m-n$ pour le nombre des produits de l'espèce $[\alpha, n-\alpha]$ qui renferment la lettre a; changeant successivement m en $m-1$, $m-2, \ldots n+1$ et sommant la série, on trouvera

$$E_2=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\ .$$

Pour passer de là au genre G_2, on remarquera qu'en général le nombre des produits de ce genre est égal au nombre des arrangemens différens dont α et $n-\alpha$ sont susceptibles ; c'est-à-dire, égal à 1.2: on aura donc

$$G_2=1.2.\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\ .$$

Considérons ensuite les produits de la troisième classe, et voyons combien il s'en trouve, dans cette classe, de l'espèce $[\alpha, \beta, n-\alpha-\beta]$; ne considérons d'abord que ceux d'entre eux qui renferment la lettre a ; cette lettre doit y être suivie des $\alpha-1$ lettres qui lui sont consécutives, dans l'ordre alphabétique, et cette première série doit être combinée avec tous les produits de seconde classe et de l'espèce $[\beta, n-\alpha-\beta]$ que peuvent fournir les $m-\alpha-1$ dernières lettres, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$; changeant donc, dans E_2, m et n en $m-\alpha-1$ et $n-\alpha$, on aura, pour le nombre des produits de cette espèce qui renferment la lettre a,

$$\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}\ ;$$

changeant successivement m en $m-1$, $m-2, \ldots n+2$, dans cette

formule, et sommant la série résultante, il viendra

$$E_3=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}.$$

Quant à G_3, il est clair qu'il sera égal à E_3 multiplié par le nombre des arrangemens dont $\alpha, \beta, n-\alpha-\beta$ sont susceptibles; et, puisqu'en général le nombre de ces arrangemens est 1.2.3, on aura

$$G_3=1.2.3.\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}.$$

On pourrait facilement poursuivre de cette manière; mais il est déjà facile d'apercevoir, et il est aisé de se convaincre, par un raisonnement rigoureux, qu'on doit avoir en général

$$E_p=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}.$$

$$G_p=1.2.3\ldots p.\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}.$$

Mais il est essentiel de remarquer que cette dernière formule n'est exacte qu'autant que les nombres α, β, γ, ... sont tous inégaux; dans le cas où quelques-uns d'entre eux sont égaux, il arrive, en effet, que le nombre des arrangemens dont ils sont susceptibles se trouve diminué. Supposons donc que l'on ait α' nombres égaux à α, β' nombres égaux à β, γ' nombres égaux à γ, et ainsi de suite; ce qui donnera

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots=p\ ;$$

la valeur de G_p deviendra alors (*)

$$G_p=\frac{1.2.3\ldots\ldots p}{1.2..\alpha'\times1.2..\beta'\times1.2..\gamma'\times\ldots}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}.$$

En résumé, on voit qu'après avoir décomposé la formule (A) en n parties, dont chacune exprime combien il y a de produits qui répondent à une classe donnée, nous avons assigné le moyen de décomposer chacune de ces parties en plusieurs autres, dont chacune indique combien il existe, dans une classe déterminée, de produits d'un même genre; et qu'enfin la formule qui exprime ce dernier

(*) Voyez le tome II des *Annales*, page 204.

nombre, en y supprimant le coefficient, fait connaître le nombre des produits de chaque espèce dont chaque genre est composé. Ainsi on a

$$C_p=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdots\frac{n-p+1}{p}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdots\frac{m-n-p+2}{p},$$

$$G_p=\frac{1.2.3\ldots\ldots p}{1.2..\alpha\times1.2..\beta\times1.2..\gamma\times\ldots}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdots\frac{m-n-p+2}{p},$$

$$E_p=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}.$$

Ces formules peuvent servir à résoudre les problèmes de probabilité que voici :

Étant donnés m *numéros* 1, 2, 3, ... m, *formant une loterie dont on extrait* n *numéros à chaque tirage ; déterminer*,

1.° *Quelle est la probabilité que les* n *numéros d'un tirage formeront* p *séries de nombres consécutifs de la suite naturelle?*

2.° *Quelle est la probabilité que, parmi ces séries, il s'en trouvera* α *composées d'un nombre déterminé de numéros*, β *composées d'un autre nombre déterminé de numéros*, γ *d'un troisième nombre déterminé des numéros ; et ainsi de suite?*

3.° *Quelle est enfin la probabilité que ces diverses séries, considérées seulement par rapport au nombre des termes qui les composent, auront un ordre déterminé, parmi les nombres de la suite naturelle?*

Ces questions se résolvent, comme l'on sait, en divisant le nombre des tirages qui satisfont à leurs conditions, lequel nombre est l'une des formules ci-dessus, par le nombre total des tirages possibles.

On pourrait aussi demander quelle est la probabilité que les numéros propres à former un tirage, d'une classe, d'un genre ou d'une espèce déterminés, sortiront dans un ordre déterminé. On résoudra cette question, en multipliant la probabilité que les numéros qui sortiront satisferont à la première condition, par la probabilité que ces numéros y satisfaisant, auront un ordre de sortie conforme à la seconde.

Nous n'étendrons pas plus loin ces considérations qui seraient susceptibles de bien d'autres développemens et applications, et nous

terminerons par une réflexion qui, bien qu'elle ait déjà été faite plusieurs fois, ne paraîtra peut-être pas déplacée ici : c'est que, dans l'impossibilité où l'on est de prévoir les applications qu'on en pourra faire un jour, il ne faut pas être trop prompt à condamner les recherches purement spéculatives. Elles ont d'ailleurs l'avantage d'exercer utilement l'esprit et de le préparer ainsi à des recherches plus importantes.

Solution du dernier des deux problèmes proposés à la page 104 de ce volume.

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

Énoncé. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3, ... m, *dont il en sort* n *à chaque tirage ; quelle probabilité y a-t-il que, parmi les* n *numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas* k *nombres consécutifs de la suite naturelle* ?

Soit une loterie composée de m numéros, dont on en tire un nombre proposé n. On a déjà assigné le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a deux qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un ambe successif. (*)

Soit une loterie composée de m numéros, dont on en tire un nombre proposé n. On demande le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a trois qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un terne successif ?

Je vais d'abord introduire à la résolution de cette question par des exemples.

I. Que le nombre des numéros extraits soit *trois* ; le nombre des ternes successifs est évidemment $m-2$.

II. Que le nombre des numéros extraits soit *quatre*.

1.° Que le numéro un soit tiré, avec les deux numéros suivans.

(*) Voyez la page 62 de ce volume.

A ce terne successif peuvent se joindre, un à un, chacun des $m-3$ numéros restans. Le nombre des cas est $m-3$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Les $m-3$ numéros restans, dont on tire deux, ne donnent pas lieu à des ternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire trois ; ils donnent lieu à $m-4$ ternes successifs.

Raisonnant de même sur les numéros suivans, quant à leur combinaison avec les numéros qui les suivent, on trouve que le nombre des ternes successifs, auxquels donne lieu l'extraction de quatre numéros, est la somme des $m-3$ et des $m-4$ premiers nombres naturels, savoir :

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}=(m-3)^2$$

III. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans. A ce terne successif peuvent se joindre, deux à deux les $n-3$ numéros restans. Le nombre des cas est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros, dont on en tire trois. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-3$ numéros donnent lieu est $m-5$.

3.° Que le numéro un soit extrait sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire quatre. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu, est $\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}$ $+\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{2}$.

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros est la somme des $m-5$ premiers nombres naturels, et celle des $(m-6)^{me}$, $(m-5)^{me}$ et $(m-4)^{me}$ premiers nombres triangulaires. Ce nombre est donc

$$\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3}.$$

IV. Que le nombre des numéros extraits soit *six*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros qui le suivent. A ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans, pris trois à trois ; le nombre des cas est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $n-3$ numéros dont on en tire quatre. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $n-3$ numéros donnent lieu est $\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}$.

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire cinq. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de six numéros, est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-2}{4}$$
$$+2.\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}.$$

V.

V. Que le nombre des numéros extraits soit *sept*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros qui le suivent. A ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans, pris quatre à quatre. Le nombre des cas, est $\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on en tire cinq. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-3$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

3.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire six. Le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$
$$+2.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}.$$

De là, le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros, est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-2}{5}$$

$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$

$$+3.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$

$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}.$$

Ces exemples paraissent suffire pour indiquer la voie à suivre dans cette recherche, et pour montrer que le cas proposé, sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux deux cas dans lesquels le nombre des numéros extraits est inférieur d'une et de deux unités.

Soit une loterie composée de m numéros, dont on tire un nombre proposé n. On demande le nombre des cas suivant lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a quatre qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un quaterne successif ?

Je vais encore introduire à la marche de cette recherche par des exemples.

I. Que le nombre des numéros extraits soit *quatre*; le nombre des quaternes successifs est évidemment $m-3$.

II. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros restans pris, un à un. Le nombre des cas est $m-4$.

2.° Les numéros un et deux étant tirés sans aucun des deux

suivans. Les numéros suivans, dont on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs.

3.° Le numéro un étant tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire quatre. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces numéros donnent lieu est $m-5$.

De là, le nombre des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros, est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}=(m-4)^2.$$

III. Que le nombre des numéros extraits soit *six*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris deux à deux. Le nombre des cas est $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec les suivans deux et trois sans le numéro quatre. Les $m-4$ numéros suivans, dont on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs.

3.° Que les numéros un et deux soient tirés sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on en tire quatre. Ils donnent lieu à $m-6$ quaternes successifs.

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire cinq. Le nombre des quaternes successifs auxquels ils donnent lieu est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}=(m-6)^2.$$

Partant, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de six numéros est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

IV. Que le nombre des numéros extraits soit *sept.*

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans pris trois à trois. Le nombre des cas est $\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$.

2.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans, sans le numéro quatre. Il reste $m-4$ numéros dont on tire quatre, et qui donnent lieu à $m-7$ quaternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on tire cinq. Ils donnent lieu à $\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}$ quaternes successifs.

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on en tire six. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}.$$

De là, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros est

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$

$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$

$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

V. Que le nombre des numéros extraits soit *huit*.

1.° Que le numéro un soit tiré avec les trois numéros suivans. A ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris quatre à quatre. Le nombre des cas est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}.$$

2.° Que le numéro un soit tiré avec les deux numéros suivans, sans le numéro quatre. Il reste $m-4$ numéros dont on tire cinq, et qui donnent lieu à $\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}$ quaternes successifs.

3.° Que le numéro un soit tiré avec le numéro deux, sans le numéro trois. Il reste $m-3$ numéros dont on tire six. Le nombre des quaternes successifs auxquels ils donnent lieu est

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$

$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}$$

4.° Que le numéro un soit tiré sans le numéro deux. Il reste $m-2$ numéros dont on tire sept. Le nombre des quaternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu est

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+2\cdot\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}$$
$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4}.$$

De là, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de huit numéros est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$
$$+3\cdot\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}+2\cdot\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$
$$+3\cdot\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}$$
$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4}\cdot\frac{m-7}{5}.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer la voie à suivre dans cette recherche; et pour montrer que le cas proposé, sur un certain nom-

bre de numéros extraits, est toujours ramené aux trois cas dans lesquels les nombres de numéros extraits sont inférieurs d'une, de deux et de trois unités.

Qu'on s'occupe des quines successifs. On montre de même que le cas proposé, sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux quatre cas dans lesquels les nombres des numéros extraits sont inférieurs d'une, de deux, de trois et de quatre unités, etc., etc. (*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problème sur les combinaisons.

SOIT une circonférence, divisée en un nombre quelconque m de parties égales, et soient affectés arbitrairement, et sans suivre aucun ordre déterminé, aux points de division les numéros 1, 2, 3,....$m-1$,

(*) En lisant ceci, on apercevra sans peine que, dans la vue d'abréger, M. Lhuilier a supprimé beaucoup d'intermédiaires; mais ils seront faciles à rétablir, si auparavant on prend la peine de relire ce qui se trouve à la page 62 de ce volume.

M. Ferriot, docteur ès sciences, professeur au lycée de Besançon, a aussi fourni, du même problème, une solution parvenue trop tard pour pouvoir trouver place dans le recueil.

J. D. G.

m. Soient joints ensuite, par des cordes, le point 1 au point 2, celui-ci au point 3, le point 3 au point 4, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à joindre le point $m-1$ au point m, et enfin ce dernier au point 1. On formera ainsi une sorte de polygone de m côtés, inscrit au cercle, et qui, en général, ne sera point régulier, puisque ses côtés pourront être inégaux, et que même quelques-uns d'entre eux pourront en couper un ou plusieurs des autres.

Si l'on varie ensuite, de toutes les manières possibles, le numérotage des points de division, et que l'on répète, pour chaque numérotage, la même opération que ci-dessus, on formera un nombre déterminé de polygones inscrits, parmi lesquels plusieurs ne différeront les uns des autres que par leur situation.

On propose de déterminer, en général, quel sera le nombre des polygones essentiellement différens ?

GÉOMÉTRIE.

Mémoire sur les solides réguliers;

Par M. Lhuilier, professeur de mathématiques à l'académie impériale de Genève.

La doctrine des *solides réguliers* a beaucoup occupé les anciens géomètres. Euclide l'a approfondie dans les trois derniers livres de ses élémens. Quelques mathématiciens ont même prétendu que c'était vers ces solides qu'était dirigé le plan de son ouvrage ; en se fondant sur l'importance des applications que les Platoniciens croyaient pouvoir faire de ces solides à l'harmonie de l'univers.

Quoique les modernes n'attachent aucun poids à ces idées chimériques des anciens, ils ont dû regarder ces solides comme dignes de leur attention, et tout au moins, comme donnant lieu à des exercices intéressans de recherches et de calcul. Ainsi Legendre, dans sa *Géométrie*, traite avec soin de leur composition et du calcul de leurs dimensions ; et, en dernier lieu, M. le professeur Bertrand a consacré plusieurs pages de ses *Élémens* à épuiser la doctrine de ces solides.

Comme il ne peut y avoir que cinq angles solides réguliers, il ne peut y avoir que cinq solides réguliers. Il est aisé de déterminer, par la proposition fondamentale de polyèdrométrie d'Euler, le nombre des faces et le nombre des angles solides qui entrent dans la composition de ces polyèdres, s'ils sont possibles (*). Mais il n'est pas aussi facile de démontrer leur possibilité, et d'exécuter leur construction,

(*) Voyez la page 172 de ce volume.

tout au moins pour l'icosaèdre-dodécagone, et pour le dédocaèdre-icosagone.

Si ces polyèdres ont lieu, ils peuvent être décomposés en pyramides régulières qui peuvent convenir, qui ont leurs faces pour bases, et dont le sommet commun est au centre de la sphère qui leur est inscrite ou circonscrite. Dans ces pyramides, l'inclinaison de deux faces latérales est connue, savoir; cette inclinaison est le tiers, le quart ou la cinquième partie de quatre angles droits, suivant que chaque angle solide du polyèdre est formé par trois, par quatre ou par cinq angles plans.

La doctrine des solides réguliers m'a paru susceptible d'être exposée d'une manière abrégée, lumineuse et régulière, en partant de la possibilité de ces pyramides, pour déterminer la composition des solides réguliers par leur répétition.

Définitions. J'appelle *pyramide droite*, une pyramide dont la base est un polygone circonscriptible au cercle, et dont le pied de la hauteur coïncide avec le centre de ce cercle.

J'appelle *pyramide régulière*, une pyramide droite dont la base est un polygone régulier.

Dans tout ce qui suit, l'angle droit est pris pour l'unité des angles plans; et l'angle solide rectangle ou l'octant est pris pour l'unité des angles solides.

I. Soit une pyramide régulière, à base triangulaire. Que l'inclinaison de deux faces latérales de cette pyramide soit le tiers de quatre droits. On demande la valeur de son angle solide S au sommet?

On a la proportion $1 : 3 . \frac{4}{3} - 2 = 1 : S$; donc $S = 2$. Partant : l'angle solide au sommet de notre pyramide vaut deux octans, et quatre de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Quatre de ces pyramides, égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, forment le *tétraèdre-tétragone* régulier.

II. Soit une pyramide régulière, à base triangulaire. Que l'in-

clinaison de deux faces latérales de cette pyramide soit le quart de quatre droits ou un droit. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:3.1-2=1:S$; donc $S=1$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide est égal à l'octant ; et huit de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Huit de ces pyramides, égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, forment l'*octaèdre-hexagone* régulier.

III. Soit une pyramide régulière, à base triangulaire. Que l'inclinaison de deux faces latérales de cette pyramide soit la cinquième partie de quatre droits. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:3.\frac{4}{5}-2=1:S$; donc $S=\frac{2}{5}$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide vaut le cinquième de deux octans ou le vingtième de huit octans ; et vingt de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Vingt de ces pyramides, égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, forment l'*icosaèdre-dodécagone* régulier.

IV. Soit une pyramide régulière, à base carrée. Que l'inclinaison de deux faces latérales de cette pyramide soit le tiers de quatre droits. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:4.\frac{4}{3}-4=1:S$; donc $S=\frac{4}{3}$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide vaut le tiers de quatre octans ou le sixième de huit octans ; et six de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Six de ces pyramides, égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, forment l'*hexaèdre-octogone* régulier, ou le *cube.*

V. Soit une pyramide régulière, à base pentagone. Que l'inclinaison de deux faces latérales de cette pyramide soit le tiers de quatre droits. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:5.\frac{4}{3}-6=1:S$; donc $S=\frac{2}{3}$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide vaut le tiers de deux octans ou le douzième de huit octans ; et douze de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Douze de ces pyramides, égales entre elles, disposées autour d'un même point, qui est leur sommet commun, forment le *dodécaèdre-icosagone* régulier.

Il est facile d'appliquer les premiers principes de la trigonométrie sphérique, relative aux triangles rectangles, à cette manière de concevoir la génération des solides réguliers.

En effet, par une des arêtes latérales de la pyramide, soit mené un plan perpendiculaire à la base. Il se forme, à l'extrémité de cette arête, un angle solide triangulaire, dont deux des faces sont perpendiculaires l'une à l'autre ; un des angles solides dièdres restans est connu : savoir, la demi-inclinaison de deux faces latérales de la pyramide ; un des angles plans est aussi connu, savoir, le demi-angle de la base de la pyramide. De là on détermine l'inclinaison d'une face à la base, ou la demi-inclinaison de deux faces du polyèdre ; et, partant aussi, le rapport du rayon du cercle inscrit à la face du polyèdre au rayon de la sphère inscrite. On détermine aussi l'angle plan de cet angle solide, dans le plan perpendiculaire à la base, ou l'inclinaison d'une arête latérale de la pyramide au plan de la base ; et partant, le rapport du rayon du cercle circonscrit à une face du solide au rayon de la sphère circonscrite. Enfin, on détermine l'angle à la base de chaque face de la pyramide. On obtient donc tous les élémens du solide, et en particulier sa capacité, relativement à l'une de ses dimensions.

Cette manière de concevoir la composition des solides réguliers, s'étend aussi à la composition d'autres polyèdres, faite sous des conditions données. Il me suffira d'en donner deux exemples.

1.° Soit une pyramide droite à base rhomboïde. Que l'inclinaison de deux faces adjacentes à l'un des angles obtus de la base, vaille le tiers de quatre droits, et que l'inclinaison de deux faces adjacentes

à l'un des angles aigus de la base, vaille le quart de quatre droits. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:2.\frac{4}{3}+2.1-4=1:S$; donc $S=\frac{2}{3}$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide vaut le tiers de deux octans ou le douzième de huit octans ; et douze de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Douze de ces pyramides égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, et appliquées par leurs faces coïncidentes, forment un *dodécaèdre-tétradécagone* rhomboïdal.

Ce solide est tiré de l'octaèdre-hexagone, et de l'hexaèdre-octogone réguliers, en menant, par chacune des arêtes, un plan également incliné aux deux faces adjacentes. Il est connu que ce solide trouve souvent des applications importantes.

2.° Soit une pyramide droite, à base rhomboïde. Que l'inclinaison de deux faces latérales, adjacentes à l'un des angles obtus de la base, soit le tiers de quatre droits ; et que l'inclinaison de deux faces latérales adjacentes à l'un des angles aigus de la base soit le cinquième de quatre droits. On demande l'angle solide S au sommet de cette pyramide ?

On a la proportion $1:2.\frac{4}{3}+2.\frac{4}{5}-4=1:S$; donc $S=\frac{4}{15}$. Partant : l'angle solide au sommet de cette pyramide est le quinzième de quatre octans ou le trentième de huit octans ; et trente de ces angles solides remplissent l'espace autour d'un point.

Application. Trente de ces pyramides égales entre elles, disposées autour d'un point qui est leur sommet commun, et appliquées par des faces coïncidentes, forment un *triacontaèdre-dotriacontagone* rhomboïdal.

Ce solide est tiré de l'icosaèdre-dodécagone et du dodécaèdre-icosagone réguliers, en menant, par chacune des arêtes, un plan également incliné aux deux faces adjacentes.

Il est aisé de déterminer la nature des rhombes des faces de ces deux derniers solides, et de rapporter leurs élémens les uns aux autres.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

Démonstration du principe qui sert de fondement au calcul des fonctions symétriques ;

Par M. GERGONNE.



Le théorème dont je vais m'occuper ici, et que Newton a donné le premier, sans démonstration, peut être énoncé en ces termes :

Il y a entre les sommes de puissances semblables de plusieurs quantités et leurs sommes de produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., des relations soumises à une loi régulière, et telles que les premières peuvent être exprimées en fonctions rationnelles et entières des dernières, et réciproquement.

Ce théorème étant proprement du domaine de la théorie des combinaisons, je vais en donner une démonstration fondée uniquement sur cette théorie, et qui me paraît plus courte et plus simple que celles que l'on déduit de la théorie des équations.

Soit a, b, c,.... des quantités quelconques, au nombre de m. Soient généralement désignées par S_n la somme de leurs n^{mes} puissances, et par P_n la somme de leurs produits n à n ; on aura $S_0=m$, $S_1=P_1$, $P_{m+k}=0$. Soient, en outre, désignées par A_n la somme de ceux de leurs produits n à n où a n'entre pas, par B_n la somme de ceux de ces produits ou b n'entre pas, et ainsi de suite, ce qui donnera $A_m=0$, $B_m=0$,.....

Ces notations admises, il est facile de se convaincre qu'on doit avoir généralement

$$P_n = A_n + aA_{n-1}; \qquad (1)$$

car, en prenant, au hasard, un produit de n des lettres données, s'il renferme a, il se trouvera dans aA_{n-1}, et ne s'y trouvera qu'une fois; et, s'il ne renferme pas a, il se trouvera dans A_n, et ne s'y trouvera également qu'une fois; d'où l'on voit que $A_n + aA_{n-1}$ contient, et ne contient qu'une fois seulement, tous les produits n à n, et est conséquemment égal à P_n.

Je dis, en second lieu, qu'on doit avoir aussi, généralement,

$$A_n + B_n + C_n + \ldots = (m-n)P_n; \qquad (2)$$

en effet, si chacune des quantités A_n, B_n, C_n, ... était précisément la somme des produits des quantités a, b, c, ... prises n à n, leur somme serait égale à m fois la somme de ces produits, c'est-à-dire, à mP_n; mais, parce que ces produits ont n facteurs, chacun d'eux doit manquer, à son tour, dans n des quantités A_n, B_n, C_n, ... La somme $A_n + B_n + C_n + \ldots$ doit donc renfermer m fois la somme des produits n à n, moins n fois cette somme, c'est-à-dire, qu'elle doit être égale à $m-n$ fois la somme de ces produits ou, ce qui revient au même, à $(m-n)P_n$.

Cela posé, soient premièrement écrites les équations que voici, lesquelles sont déduites de l'équation (1); et en nombre moindre que m,

$$P_1 = A_1 + a \quad ;$$
$$P_2 = A_2 + aA_1 \ ,$$
$$P_3 = A_3 + aA_2 \ ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_n = A_n + aA_{n-1} \ ;$$

on en conclura facilement, en réduisant,

$$a^n - P_1 a^{n-1} + P_2 a^{n-2} - P_3 a^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm A_n \ ;$$

on aurait pareillement

$$b^n - P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm B_n ,$$

$$c^n - P_1 c^{n-1} + P_2 c^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_n = \pm C_n ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

prenant donc la somme de ces équations, en ayant égard à l'équation (2), il viendra

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm m P_n = \pm (m-n) P_n ,$$

ou, en transposant et réduisant,

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm n P_n = 0. \qquad (3)$$

Soit, en second lieu, $n > m$, et soient écrites les équations que voici :

$$P_1 = A_1 + a \quad ;$$

$$P_2 = A_2 + a A_1 ,$$

$$P_3 = A_3 + a A_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_m = 0 + a A_{m-1} ;$$

on en déduira facilement

$$a^n - P_1 a^{n-1} + P_2 a^{n-2} - P_3 a^{n-3} + \ldots \pm P_m a^{n-m} = 0 ;$$

on aura pareillement

$$b^n - P_1 b^{n-1} + P_2 b^{n-2} - P_3 b^{n-3} + \ldots \pm P_m b^{n-m} = 0 ,$$

$$c^n - P_1 c^{n-1} + P_2 c^{n-2} - P_3 c^{n-3} + \ldots \pm P_m c^{n-m} = 0 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

d'où, en ajoutant

$$S_n - P_1 S_{n-1} + P_2 S_{n-2} - P_3 S_{n-3} + \ldots \pm P_m S_{n-m} = 0. \qquad (4)$$

On déduit des équations (3) et (4)

$$S_1 - P_1 = 0 ;$$

$$S_2 - P_1 S_1 + 2 P_2 = 0 ,$$

S_3

$$S_3-P_1S_2+P_2S_1-3P_3=0\ ,$$

. . . .

$$S_{m-1}-P_1S_{m-2}+P_2S_{m-3}-P_3S_{m-4}+\dots\mp(m-1)P_{m-1}=0\ ,$$

$$S_m-P_1S_{m-1}+P_2S_{m-2}-P_3S_{m-3}+\dots\dots\mp P_{m-1}S_1\pm mP_m=0\ ,$$

$$S_{m+1}-P_1S_m+P_2S_{m-1}-P_3S_{m-2}+\dots\dots\dots\mp P_{m-1}S_2\pm P_mS_1=0\ ,$$

$$S_{m+2}-P_1S_{m+1}+P_2S_m-P_3S_{m-1}+\dots\dots\dots\mp P_{m-1}S_3\pm P_mS_2=0\ ,$$

. . . . ;

équations qui mettent en evidence la vérité du théorème.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solutions du problème d'analise indéterminée, proposé à la page 140 de ce volume;

Par MM. Du Bourguet, S..., Cardinali, Lanjuinais et Le Grand.



Enoncé. *On demande quatre nombres pairs, en progression arithmétique, tels qu'en multipliant la somme des trois derniers par la somme des deux du milieu, on obtienne un produit égal au cube d'un moyen arithmétique entre les deux premiers de ces quatre nombres ?*

La difficulté de ce problème paraît consister principalement en ce que, s'élevant naturellement au troisième degré, il faut le rabaisser au second. C'est, en effet, ce qu'ont fait M. Du Bourguet, professeur de mathématiques speciales au lycée impérial, M. S..., et M. Le Grand, elève de l'école normale; MM. Cardinali, professeur

à Trévise, et Lanjuinais, professeur à Rodez, l'ont traité par des méthodes indirectes : mais MM. Du Bourguet et Le Grand sont les seuls qui se soient proposés d'en assigner toutes les solutions ; ils ont trouvé, le premier, qu'elles étaient au nombre de trois, et le second, qu'elles étaient au nombre de quatre ; mais on peut dire qu'elles sont réellement au nombre de cinq, comme nous allons le faire voir, en suivant à peu près l'analise de M. Du Bourguet.

Solution. Soient $2x$ le premier terme, et $2y$ la raison de la progression ; ses quatre termes seront

$$\div 2x \,.\, 2x+2y \,.\, 2x+4y \,.\, 2x+6y \;;$$

et l'on devra avoir, par l'énoncé du problème,

$$(6x+12y)(4x+6y)=(2x+y)^3.$$

Posant $2x+y=z$, d'où $2x=z-y$, cette équation deviendra

$$(2z+4y)(3z+9y)=z^3 \;,$$

ou, en posant $6y=t$ et développant

$$t^2+5zt+(6-z)z^2=0 \;,$$

d'où

$$t=z.\frac{-5\pm\sqrt{4z+1}}{2}.$$

Soit fait $\pm\sqrt{4z+1}=u$, d'où $4z+1=u^2$ et $z=\frac{u^2-1}{4}$; donc

$$t=\frac{(u^2-1)(u-5)}{8} \;,$$

et

$$y=\frac{(u^2-1)(u-5)}{48} \;, \qquad x=\frac{(u^2-1)(17-u)}{96}.$$

Par l'inspection de ces valeurs, on voit évidemment que u ne peut être qu'un nombre impair ; posant donc $u=2v+1$, il viendra enfin

$$x=\frac{v(v+1)(8-v)}{12} \;, \qquad y=\frac{v(v+1)(v-2)}{6}.$$

La nécessité d'avoir x positif renferme les valeurs de v entre -1 et $+8$; mais, attendu que les valeurs $+1$, $+4$, $+5$, $+7$ de v rendent x fractionnaire, on ne peut admettre que les six systèmes que voici :

$\begin{cases} v=-1, \\ x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} v=0, \\ x=0, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} v=2, \\ x=3, \\ y=0; \end{cases} \begin{cases} v=3, \\ x=5, \\ y=2; \end{cases} \begin{cases} v=6, \\ x=7, \\ y=28, \end{cases} \begin{cases} v=8, \\ x=0, \\ y=72; \end{cases}$

et, puisque les valeurs -1 et 0 de v donnent les mêmes valeurs pour x et y, le problème n'a réellement que les cinq solutions suivantes :

$$\div\ 0.\ 0.\ 0.\ 0,$$
$$\div\ 6.\ 6.\ 6.\ 6,$$
$$\div\ 10.\ 14.\ 18.\ 22,$$
$$\div\ 14.\ 70.\ 126.\ 182,$$
$$\div\ 0.\ 144.\ 288.\ 432.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Des arcs de cercles, en nombre infini, de même longueur, mais de differens rayons, situés dans un même plan, touchant d'un même côté, par leur milieu, une même droite, en un même point; déterminer l'équation de la courbe qui contient les extrémités de ces arcs ?

II. Des calottes sphériques, en nombre infini, de même surface, mais de différens rayons, touchant d'un même côté, par leur pôle, un même plan, en un même point ; déterminer l'équation de la surface qui contient les circonférences de ces calottes ?

ANALISE TRANSCENDANTE.

Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent ; avec des applications à l'intégration d'une classe nombreuse d'equations ;

Présenté à la 1.re classe de l'institut, le 25 d'octobre 1811 ;

Par M. J. F. Français, professeur à l'école impériale de l'artillerie et du génie.



Depuis que M. Lagrange a réveillé l'attention des géomètres, sur l'analogie, aperçue par Leibnitz, entre les puissances et les différences, par les beaux théorèmes de son mémoire de 1772, plusieurs géomètres ont cherché à démontrer ces théorèmes, et à étendre la méthode de calcul fondée sur cette analogie ; mais Arbogast est le premier qui se soit proposé de débarrasser cette méthode des inconvéniens qu'entraîne le passage alternatif des indices aux exposans, et des exposans aux indices. L'idée heureuse qu'il a eu de détacher les caractéristiques ou *échelles d'opérations* des fonctions qu'elles affectent, pour les traiter comme des symboles de quantités, remplit parfaitement le but qu'il s'est proposé. Mais cette idée est en même temps si hardie et si opposée aux idées reçues, qu'on a eu jusqu'ici une sorte de répugnance à l'admettre, malgré l'exactitude des résultats qu'elle fournit; et on a naturellement lieu de désirer

une démonstration *à priori* de la légitimité de cette opération. Cette démonstration est d'autant plus nécessaire, que l'opération de détacher les échelles n'est pas applicable à tous les cas (ce qu'au surplus elle a de commun avec la méthode fondée sur l'analogie en question); il faut donc que la démonstration du principe conduise elle-même à distinguer les cas auxquels elle est applicable, de ceux où elle ne l'est pas. C'est cette démonstration, avec quelques applications de la méthode de séparation des échelles, qui va faire le sujet de ce mémoire.

§. I.

De la séparation des échelles, dans les fonctions à une seule variable.

1. Si, entre les deux variables x et y, on a une équation exprimée par

$$(1) \qquad F(x,y)=0,$$

et qu'on multiplie cette équation par tant de constantes et fonctions de constantes qu'on voudra, on ne changera en rien la relation entre x et y, exprimée par cette équation, et on n'y introduira aucune relation nouvelle. Ainsi, les équations

$$(2)\left\{\begin{array}{l} aF(x,y)+bF(x,y)+cF(x,y)+\dots\dots\dots\dots=0, \\ f_1(a,b,c,\dots)F(x,y)+f_2(a,b,c,\dots)F(x,y)+\dots=0, \end{array}\right.$$

qu'on peut aussi mettre sous cette forme

$$(3)\left\{\begin{array}{l} (a+b+c+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots)F(x,y)=0, \\ [f_1(a,b,c,\dots)+f_2(a,b,c,\dots)+\dots]F(x,y)=0; \end{array}\right.$$

et dans lesquelles a, b, c,.... sont des constantes quelconques, ne disent ni plus ni moins que la proposée (1). Mais il n'en serait plus de même, si l'on multipliait la proposée par une ou plusieurs fonctions soit de x, soit de y, soit de x et y : ces nouveaux facteurs, introduisant évidemment des relations nouvelles, changeraient nécessairement la nature de la proposée.

2. De même, si l'on différentie, tant de fois qu'on voudra, l'équation (1), soit aux différences soit aux différentielles, et quel que soit le système de différentiation (c'est-à-dire, quelle que soit la variable ou la fonction des deux variables dont on considère la différentielle comme constante), on n'y changera en rien la relation entre x et y, et on n'y introduira aucune relation nouvelle. En effet, en différentiant une équation entre deux variables, on ne fait autre chose qu'exprimer l'indétermination complette de l'une d'elles; car, si l'une des variables reçoit un accroissement arbitraire, l'autre en reçoit un qui est déterminé par la forme de l'équation proposée, sans qu'il y soit introduit aucune relation nouvelle. Ainsi les équations

$$(4)\quad\begin{cases}\partial F(x,y)=0\,,\ \Delta F(x,y)=0\,,\ \mathrm{E}\,F(x,y)=0\ ;\\ \partial^2 F(x,y)=0\,,\ \Delta^2 F(x,y)=0\,,\ \mathrm{E}^2 F(x,y)=0\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;\ (^*)\end{cases}$$

n'exprime ni plus ni moins que la proposée (1). Il en serait de même d'un système quelconque de ces équations, combinées entre elles et avec des constantes, telles que sont les suivantes :

$$(5)\quad\begin{cases}\partial^n F(x,y)+a\partial^{n-1}F(x,y)+b\partial^{n-2}F(x,y)+\ldots+kF(x,y)=0\ ;\\ \partial^n F(x,y)+a\Delta\partial^{n-1}F(x,y)+b\Delta^2\partial^{n-2}F(x,y)+\ldots+k\Delta^n F(x,y)=0.\end{cases}$$

Les *échelles*, ou signes de différentes espèces de différentiation, se comportent donc de la même manière, à l'egard de l'équation proposée qu'elles affectent, que les constantes des équations (2). *On peut donc considérer ces constantes comme des échelles*; *et réciproquement, on peut traiter les échelles comme des quantités constantes;* sauf à se rappeler, dans les résultats, que ces échelles indiquent des

(*) A l'exemple d'Arbogast, M. Français emploie ici la caractéristique E, comme signe de l'état varié de la fonction; quant au ∂, c'est, comme le D de M. Kramp, un signe de dérivation; en sorte qu'on a $\partial\varphi(x)=\mathrm{D}\varphi(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}$. Voyez le *Calcul des dérivations*, pages 306 et 375.

J. D. G.

opérations déterminées qu'il s'agira d'effectuer. Ainsi, on peut écrire les équations (5) de cette manière :

$$(6)\begin{cases}(\partial^n + a\partial^{n-1} + b\,\partial^{n-2} + \ldots\ldots + k\quad)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\(\partial^n + a\Delta\partial^{n-1} + b\Delta^2\partial^{n-2} + \ldots\ldots + k\Delta^n)\mathrm{F}(x,y)=0\,;\end{cases}$$

et c'est ce qu'on appelle *détacher les échelles*.

3. Il est de plus évident qu'on peut faire subir aux constantes et aux échelles détachées, (3) et (6), telles opérations qu'on veut, sans introduire aucune relation étrangère à la proposée ; ainsi, par exemple, aux équations (3) et (6) on peut substituer

$$(7)\begin{cases}\varphi(a+b+c+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\\varphi\{\mathrm{f}_1(a,b,c,\ldots)+\mathrm{f}_2(a,b,c,\ldots)+\ldots\ldots\}\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\\varphi(\partial^n+\ a\partial^{n-1}+\ b\partial^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+\ k)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\\varphi(\partial^n+a\Delta\partial^{n-1}+b\Delta^2\partial^{n-2}+\ldots\ldots\ldots+k\Delta^n)\mathrm{F}(x,y)=0\,;\end{cases}$$

où φ n'affecte que les constantes et les échelles, et indique une fonction quelconque. A plus forte raison peut-on les mettre sous une forme identique, telle que serait leur décomposition en facteurs, ou leur expression sous forme de fonction non développée. Ainsi, si $\partial-\alpha_1$, $\partial-\alpha_2$, $\partial-\alpha_3$, ..., $\partial-\alpha_n$, sont les facteurs de l'echelle $\partial^n+a\partial^{n-1}+b\partial^{n-2}+\ldots\ldots+k$, on pourra mettre les équations (6) sous la forme

$$(8)\begin{cases}(\partial-\alpha_1\quad)(\partial-\alpha_2\quad)(\partial-\alpha_3\quad)\ldots\ldots(\partial-\alpha_n\quad)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\(\partial-\alpha_1\Delta)(\partial-\alpha_2\Delta)(\partial-\alpha_3\Delta)\ldots\ldots(\partial-\alpha_n\Delta)\mathrm{F}(x,y)=0\,.\end{cases}$$

On pourra donc mettre aussi les équations

$$(9)\begin{cases}(\partial^n+\frac{n}{1}\mathrm{E}\partial^{n-1}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\mathrm{E}^2\partial^{n-2}+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\mathrm{E}^3\partial^{n-3}+\ldots\ldots+\mathrm{E}^n)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\\(\partial+\frac{1}{1.2}\partial^2+\frac{1}{1.2.3}.\partial^3+\frac{1}{1.2.3.4}.\partial^4+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)\mathrm{F}(x,y)=0\,,\end{cases}$$

sous la forme

$$(10)\qquad(\partial+\mathrm{E})^n\mathrm{F}(x,y)=0\,,\quad(e^{\partial}-1)\mathrm{F}(x,y)=0\,;$$

parce que le développement de ces dernières formes redonnerait les premières.

En général, si l'échelle est le développement d'une fonction de forme connue, on pourra substituer à ce développement la fonction non développée.

4. Cette manière d'envisager les échelles d'opérations fait voir clairement pourquoi la méthode de les detacher ne doit s'etendre qu'aux formules ou équations dans lesquelles elles ne sont combinées qu'entre elles et avec des quantites constantes; elle démontre de plus, ce me semble, d'une manière bien convaincante, et déduit des premiers principes du calcul, la légitimité de cette opération, quand les échelles ne sont mèlees qu'entre elles, ou avec de quantités constantes. Elle fait voir encore la nécessité d'adopter la notation différentielle introduite par Arbogast, comme la seule susceptible de cette opération. Cette notation s'écarte d'ailleurs le moins possible de celle de Leibnitz, puisqu'il suffit de faire dans celle-ci $dx=1$, pour avoir celle d'Arbogast.

5. Si l'équation (1) devient identique, et prend la forme

$$(11) \qquad \varphi x-\varphi x=0\;;$$

l'une de ces fonctions, multipliée par l'échelle, peut être mise dans le second membre; alors on peut laisser l'échelle non développée dans l'un des membres, et écrire son développement dans l'autre. Ainsi, *toute équation dont le second membre est le développement du premier, peut être considérée comme une équation à échelles*, qui, étant multipliée par une fonction quelconque de x, fournira une multitude de formules et de théorèmes que souvent on ne pourrait obtenir, par les voies ordinaires, que d'une manière longue et laborieuse. Mais, avant de nous livrer aux applications, nous allons établir les relations qui existent entre les diverses echelles ou signes de differentiation.

6. Lorsque, dans φx, la variable x reçoit un accroissement ξ, cette fonction devient $\varphi(x+\xi)$, et l'on a, par le *Théorème de Taylor*,

$$\varphi(x+\xi)=\varphi x+\xi\partial\varphi x+\tfrac{1}{2}\xi^2\partial^2\varphi x+\frac{1}{2.3}\xi^3\partial^3\varphi x+\ldots.$$

Quand

Quand on a $\xi=1$, cette équation devient

$$\varphi(x+1)=\varphi x+\partial\varphi x+\tfrac{1}{2}\partial^2\varphi x+\frac{1}{2.3}\partial^3\varphi x+\ldots..$$

En détachant les échelles des seconds membres de ces équations, on peut les mettre sous la forme

$$(12)\qquad \varphi(x+\xi)=e^{\xi\partial}.\varphi x\ ,\qquad \varphi(x+1)=e^{\partial}.\varphi x.$$

Les expressions $\varphi(x+\xi)$ et $\varphi(x+1)$ sont ce qu'on appelle les *états variés* de φx ; la variation dépendant de l'accroissement de la variable, qui est $=\xi$, dans la première expression, et $=1$, dans la seconde. Afin de les rendre susceptibles du calcul des échelles, nous représenterons, avec Arbogast, $\varphi(x+1)$ par $E^1\varphi x$, ou simplement par $E\varphi x$, et conséquemment $\varphi(x+\xi)$ par $E^{\xi}\varphi x$; les seconds membres des équations (12) justifient complètement cette notation. Par ce moyen, on peut mettre ces équations sous la forme

$$E^{\xi}.\varphi x=e^{\xi\partial}.\varphi x\ ,\qquad E\varphi x=e^{\partial}.\varphi x.$$

On a donc, en détachant les échelles

$$E=e^{\partial}\ ;$$

équation qui exprime la relation entre l'échelle de l'état varié et celle des différentielles.

On a coutume d'exprimer aussi le premier membre de l'équation que fournit le *théorème de Taylor* par $\varphi x+\Delta\varphi x$; de sorte que $\varphi(x+\xi)=\varphi x+\Delta\varphi x$, et que $\Delta\varphi x$ exprime l'accroissement de φx, lorsque x devient $x+\xi$. Nous réserverons cette notation pour le cas où l'accroissement de x est $=1$, et nous représenterons par $\Delta_{\xi}\varphi x$ l'accroissement de φx, lorsque x devient $x+\xi$; afin que, par notre notation, l'échelle indique en même temps l'accroissement de la variable x. Ainsi, nous aurons

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l}\varphi(x+1)=E\ \varphi x=\varphi x+\Delta\ \varphi x=e^{\partial}.\varphi x\ ,\\ \varphi(x+\xi)=E^{\xi}\varphi x=\varphi x+\Delta_{\xi}\varphi x=e^{\xi\partial}.\varphi x\ .\end{array}\right.$$

En détachant les échelles de ces deux systèmes d'équations, on obtient les relations suivantes, entre les échelles des états variés, celles de différences et celles des différentielles

$$(14) \qquad E = 1 + \Delta = e^{\partial}, \quad E^{\xi} = 1 + \Delta_{\xi} = e^{\xi\partial}.$$

De celles-ci on tire ensuite celles que voici:

$$(15) \qquad \Delta = E - 1 = (1+\Delta_{\xi})^{\frac{1}{\xi}} - 1 = e^{\partial} - 1, \quad \Delta_{\xi} = E^{\xi} - 1 = (1+\Delta)^{\xi} - 1 = e^{\xi\partial} - 1;$$

$$(16) \qquad \partial = \text{Log.}E = \text{Log.}(1+\Delta) = \frac{1}{\xi}\text{Log.}(1+\Delta_{\xi}) = \text{Log.}(1+\Delta_{\xi})^{\frac{1}{\xi}}.$$

7. Telles sont les relations qui existent entre les différentes échelles de différentiation. On en tire immédiatement, et de la manière la plus rigoureuse, les beaux théorèmes que M. Lagrange a donnés le premier, dans son mémoire de 1772, et d'autres encore plus généraux. Car, en faisant, sur les deux membres des équations (14), (15) et (16), les mêmes opérations (sans y introduire des variables) et multipliant les résultats par φx, on aura autant de théorèmes généraux qu'on voudra. Nous nous contenterons d'en tirer la belle *théorie de l'interpolation*, donnée par M. Lagrange dans un des *Mémoires de l'académie de Berlin*, pour les années 1792 et 1793.

Puisqu'on a (14) $E^{\xi} = 1 + \Delta_{\xi}$, on aura aussi $E^{\prime} = 1 + \Delta_{\prime}$; mais on a $E^{\prime} = (E^{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}} = (1+\Delta_{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}}$; donc $1 + \Delta_{\prime} = (1+\Delta_{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}}$; et enfin $\Delta_{\prime} = (1+\Delta_{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}} - 1$. En élevant chaque membre à la puissance n, on obtient

$$(17) \qquad \Delta_{\prime}^{n} = \{(1+\Delta_{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}} - 1\}^{n},$$

et, en multipliant par φx

$$(18) \qquad \Delta_{\prime}^{n}\varphi x = \{(1+\Delta_{\xi})^{\frac{\prime}{\xi}} - 1\}^{n}.\varphi x;$$

où il ne s'agit plus que de développer l'échelle du second membre, et de multiplier par φx chacun des termes de son développement.

Cette formule contient la théorie la plus générale de l'interpolation;

elle fournit, en effet, la solution du problème suivant : *Connaissant les différences d'une fonction, pour un accroissement donné de la variable, déterminer sa différence d'un ordre quelconque, pour un autre accroissement de la variable ?*

Si l'on voulait avoir, en différentielles, l'expression de la différence d'un ordre quelconque n, pour un accroissement ξ de la variable, la seconde des équations (15), élevée à la puissance n, donnerait immédiatement

$$\Delta_{\xi}^{n} = (e^{\xi\partial} - 1)^{n},$$

et, en multipliant par φx

$$(19) \qquad \Delta_{\xi}^{n}\varphi x = (e^{\xi\partial} - 1)^{n}.\varphi x,$$

où il n'y a plus qu'à développer l'échelle du second membre et à multiplier par φx chaque terme du développement; on aurait de la même manière, en changeant le signe de n

$$(20) \qquad \Sigma_{\xi}^{n}\varphi x = \Delta_{\xi}^{-n}\varphi x = (e^{\xi\partial} - 1)^{-n}.\varphi x.$$

8. Les deux exemples que nous venons de donner ne sont que des résultats, pour ainsi dire immédiats, des relations de définition entre les échelles de différentiation ; et l'on en tirerait aisément beaucoup d'autres théorèmes également remarquables. On en peut aussi déduire un grand nombre de la remarque que nous avons faite au n.° 5, que toute équation entre des constantes pouvait être considérée comme une équation à échelles qui, étant multipliée par φx, fournissait des formules et des vérités nouvelles. Je me contenterai d'en donner deux exemples, tirés d'un ouvrage inédit de feu mon frère, qui a pour objet ce genre d'application du calcul des échelles qu'il a très étendu, sans avoir connu la démonstration de la légitimité de ces opérations.

9. On trouve dans les *Opuscula analytica* d'Euler, tome 1.er, page 173, cette formule

(21) $$\frac{\varpi}{4}\alpha = \text{Sin.}\alpha - \frac{1}{3^2}\text{Sin.}3\alpha + \frac{1}{5^2}\text{Sin.}5\alpha - \frac{1}{7^2}\text{Sin.}7\alpha + \ldots .$$

En la mettant sous la forme exponentielle, elle devient

$$\frac{\varpi}{2}\alpha\sqrt{-1} = (e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}) - \frac{1}{3^2}(e^{3\alpha\sqrt{-1}} - e^{-3\alpha\sqrt{-1}}) + \frac{1}{5^2}(e^{5\alpha\sqrt{-1}} - e^{-5\alpha\sqrt{-1}}) - \ldots$$

Soit $\alpha\sqrt{-1} = \partial$; à cause de $e^{\partial} = \text{E}$, on aura

$$\frac{\varpi}{2}\partial = (\text{E}^1 - \text{E}^{-1}) - \frac{1}{3^2}(\text{E}^3 - \text{E}^{-3}) + \frac{1}{5^2}(\text{E}^5 - \text{E}^{-5}) - \ldots\ldots ;$$

ou, en multipliant par φx, et effectuant les opérations indiquées par les caractéristiques E,

(22) $$\frac{\varpi}{2}\partial\varphi x = \{\varphi(x+1) - \varphi(x-1)\} - \frac{1}{3^2}\{\varphi(x+3) - \varphi(x-3)\} + \ldots$$

Si, 1.° on fait $\varphi x = x$, on obtient la formule de Leibnitz,

$$\frac{\varpi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Si, 2.° on fait $\varphi x = \frac{1}{x}$, on trouve, en divisant par 2,

(23) $$\frac{\varpi}{4}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2-3^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x^2-5^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{x^2-7^2} + \ldots$$

ou bien, en faisant $\frac{1}{x^2} = -a$,

(24) $$\frac{\varpi}{4} = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+3^2a} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+5^2.a} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{1+7^2a} + \ldots\ldots$$

où la quantité a demeure absolument arbitraire. Si l'on fait $a=0$, on retrouve la série de Leibnitz.

Si, 3.° on fait $\varphi x = \text{Log}.x$, on aura

(25) $$\frac{\varpi}{2}\cdot\frac{1}{x} = \text{Log.}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{1}{3^2}\text{Log.}\left(\frac{x+3}{x-3}\right) + \frac{1}{5^2}\text{Log.}\left(\frac{x+5}{x-5}\right) - \ldots\ldots$$

En faisant $\frac{1}{x} = a\sqrt{-1}$, et divisant par 2, on obtient

(26) $$\frac{\varpi}{4}a = \text{Arc.(Tang.}=a) - \frac{1}{3^2}\text{Arc.(Tang.}=3a) + \frac{1}{5^2}\text{Arc.(Tang.}=5a) - \ldots\ldots$$

On voit, par cet exemple, avec quelle facilité on déduit les for-

mules (23), (24), (25), (26) de l'équation (22), considérée comme une équation à échelles.

10. Nous prendrons, pour second exemple, la formule

$$\frac{a+\text{Cos.}\alpha}{1+2a\text{Cos.}\alpha+a^2}=\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos.}2\alpha+a^2\text{Cos.}3\alpha-a^3\text{Cos.}4\alpha+\ldots.;$$

qu'on trouve dans les *Mathématical mémoirs* de Landen, tome 1.er, page 106. Étant débarrassée du dénominateur, elle devient

$$(27)\quad a+\text{Cos.}\alpha=(1+2a\text{Cos.}\alpha+a^2)(\text{Cos.}\alpha-a\text{Cos.}2\alpha+a^2\text{Cos.}3\alpha-a^3\text{Cos.}4\alpha+\ldots).$$

Faisons d'abord $a=\text{E}^\xi$; en multipliant par φx, nous aurons

$$(28)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi(x+\xi)+\varphi x\text{Cos.}\alpha=\\ \quad[\varphi x+2\varphi(x+\xi)\text{Cos.}\alpha+\varphi(x+2\xi)]\text{Cos.}\alpha\\ -[\varphi(x+\xi)+2\varphi(x+2\xi)\text{Cos.}\alpha+\varphi(x+3\xi)]\text{Cos.}2\alpha\\ +[\varphi(x+2\xi)+2\varphi(x+3\xi)\text{Cos.}\alpha+\varphi(x+4\xi)]\text{Cos.}3\alpha\\ -[\varphi(x+3\xi)+2\varphi(x+4\xi)\text{Cos.}\alpha+\varphi(x+5\xi)]\text{Cos.}4\alpha\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right.$$

Soient successivement $\varphi x=\text{Sin.}x$ et $\varphi x=\text{Cos.}x$; l'équation précédente donnera, en observant qu'on a $\text{Sin.}[x+n\xi]+\text{Sin.}[x+(n+2)\xi]=2\text{Sin.}[x+(n+1)\xi]\text{Cos.}\xi$ et $\text{Cos.}[x+n\xi]+\text{Cos.}[x+(n+2)\xi]=2\text{Cos.}[x+(n+1)\xi]\text{Cos.}\xi$,

$$(29)\quad \tfrac{1}{2}\text{Sin.}x+\tfrac{1}{2}.\frac{\text{Cos.}x\text{Sin.}\xi}{\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\xi}=\text{Sin.}(x+\xi)\text{Cos.}\alpha-\text{Sin.}(x+2\xi)\text{Cos.}2\alpha+\text{Sin.}(x+3\xi)\text{Cos.}3\alpha-\ldots;$$

$$(30)\quad \tfrac{1}{2}\text{Cos.}x-\tfrac{1}{2}.\frac{\text{Sin.}x\text{Sin.}\xi}{\text{Cos.}\alpha+\text{Cos.}\xi}=\text{Cos.}(x+\xi)\text{Cos.}\alpha-\text{Cos.}(x+2\xi)\text{Cos.}2\alpha+\text{Cos.}(x+3\xi)\text{Cos.}3\alpha-\ldots;$$

Si, dans ces deux équations, on fait $x=0$ et $\xi=\alpha$, elles deviendront

$$(31)\quad \tfrac{1}{2}\text{Tang.}\alpha=\text{Sin.}2\alpha-\text{Sin.}4\alpha+\text{Sin.}6\alpha-\text{Sin.}8\alpha+\ldots.$$

$$(32)\quad \tfrac{1}{2}=\text{Cos.}^2\alpha-\text{Cos.}^2 2\alpha+\text{Cos.}^2 3\alpha-\text{Cos.}4\alpha+\ldots..$$

Soit, en second lieu, $a=\xi\partial$, dans l'équation (27); en la multipliant par φx, on obtient

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi\,\partial\,\varphi x+\varphi x\,\mathrm{Cos.}\alpha= \\ (\varphi x+2\xi\,\partial\,\varphi x\,\mathrm{Cos.}\alpha+\xi^2\partial^2\varphi x)\,\mathrm{Cos.}\,\alpha \\ -(\xi\,\partial\,\varphi x+2\xi^2\partial^2\varphi x\,\mathrm{Cos.}\alpha+\xi^3\partial^3\varphi x)\,\mathrm{Cos.}2\alpha \\ +(\xi^2\partial^2\varphi x+2\xi^3\partial^3\varphi x\,\mathrm{Cos.}\alpha+\xi^4\partial^4\varphi x)\,\mathrm{Cos.}3\alpha \\ -(\xi^3\partial^3\varphi x+2\xi^4\partial^4\varphi x\,\mathrm{Cos.}\alpha+\xi^5\partial^5\varphi x)\,\mathrm{Cos.}4\alpha \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Soit $\varphi x=\mathrm{Sin.}x$, et qu'on égale séparément à zéro ce qui est affecté de $\mathrm{Sin.}x$ et de $\mathrm{Cos.}x$, on aura les deux équations

$$(34)\quad \begin{array}{l} \mathrm{Cos.}\alpha=(1-\xi^2)(\mathrm{Cos.}\alpha-\xi^2\mathrm{Cos.}3\alpha+\xi^4\mathrm{Cos.}5\alpha-\xi^6\mathrm{Cos.}7\alpha+\ldots) \\ \quad +2\xi^2\mathrm{Cos.}\alpha(\mathrm{Cos.}2\alpha-\xi^2\mathrm{Cos.}4\alpha+\xi^4\mathrm{Cos.}6\alpha-\xi^6\mathrm{Cos.}8\alpha+\ldots); \end{array}$$

$$(35)\quad \begin{array}{l} 1=2\mathrm{Cos.}\alpha(\mathrm{Cos.}\alpha-\xi^2\mathrm{Cos.}3\alpha+\xi^4\mathrm{Cos.}5\alpha-\xi^6\mathrm{Cos.}7\alpha+\ldots) \\ \quad -(1-\xi^2)(\mathrm{Cos.}2\alpha-\xi^2\mathrm{Cos.}4\alpha+\xi^4\mathrm{Cos.}6\alpha-\xi^6\mathrm{Cos.}8\alpha+\ldots). \end{array}$$

Si, dans ces équations, on fait $\xi=1$, elles donnent

$$(36)\quad \tfrac{1}{2}=\mathrm{Cos.}2\alpha-\mathrm{Cos.}4\alpha+\mathrm{Cos.}6\alpha-\mathrm{Cos.}8\alpha+\ldots\ldots,$$

$$(37)\ \ldots\ \tfrac{1}{2}\mathrm{Sec.}\alpha=\mathrm{Cos.}\alpha-\mathrm{Cos.}3\alpha+\mathrm{Cos.}5\alpha-\mathrm{Cos.}7\alpha+\ldots\ldots.$$

En mettant, dans l'équation (36), α à la place de 2α, elle devient

$$(38)\quad \tfrac{1}{2}=\mathrm{Cos.}\alpha-\mathrm{Cos.}2\alpha+\mathrm{Cos.}3\alpha-\mathrm{Cos.}4\alpha+\ldots\ldots$$

Ces deux dernières équations, comparées aux équations (31) et (32), donnent lieu à des rapprochemens remarquables.

11. Les deux exemples que je viens de donner suffisent pour faire connaître l'esprit de la méthode, et les avantages qu'elle présente, pour parvenir, avec une singulière facilité, à des résultats qu'on n'obtiendrait souvent que d'une manière pénible par les voies ordinaires. Je vais indiquer maintenant une application d'une autre nature de la méthode de détacher les échelles. Elle faisait le sujet d'un mémoire sur l'*Intégration des équations linéaires à coefficiens constans*, que j'avais présenté à l'institut en l'an XI, mais que j'ai fait retirer, parce qu'alors je n'étais pas encore en état de justifier la légitimité de la méthode, autrement que par l'exactitude de ses résultats.

12. Si l'on suppose que l'équation (1) soit résolue et mise sous la forme $y=\varphi x$, il est évident qu'on pourra lui appliquer les mêmes raisonnemens que nous avons faits sur l'équation (1), pourvu que l'échelle qui affecte l'un des membres soit équivalente à celle qui affecte l'autre. Il est encore évident qu'on ne changera pas la relation entre x et y, en faisant, sur chacune de ces deux échelles identiques, des opérations équivalentes (sans cependant introduire de variables) et que ces échelles, en elles-mêmes, sont entièrement arbitraires. Mais, s'il arrive que, par suite des opérations indiquées par l'échelle, le second membre, qui est une fonction explicite de x, disparaisse; alors l'échelle du premier membre cesse d'être arbitraire, et elle détermine la forme de la fonction y ou φx. Il est évident que, dans ce cas, on ne peut plus faire, sur l'échelle qui affecte y ou le premier membre, des opérations quelconques, mais seulement des transformations qui ne changent pas les relations entre les différentes parties de l'échelle, et qui n'y en introduisent point de nouvelles. Ainsi, si l'on a $(\partial-a)y=(\partial-a)\varphi x$, on peut faire $(\partial-a-b)y=(\partial-a-b)\varphi x$, tant que le second membre subsiste; mais, si $(\partial-a)\varphi x=0$, il n'est plus permis de faire $(\partial-a-b)y=0$; on a alors nécessairement $(\partial-a)y=0$; et cette équation n'exprime plus, à proprement parler, qu'une relation entre les échelles; de sorte qu'on a $\partial-a=0$, et non $y=0$; et cette relation $\partial-a=0$ détermine la forme de y ou φx, ainsi que nous allons le voir.

L'équation

$$(39) \qquad \partial\varphi x-a\varphi x=0$$

donne, en détachant les échelles, $\partial=a$, et par conséquent $e^{\partial}=e^{a}$ ou, d'après l'équation (14),

$$(40) \qquad E=e^{a};$$

d'où l'on tire

$$(41) \qquad E^{k}=e^{ak} \quad \text{ou} \quad 1=e^{-ak}.E^{k};$$

multipliant cette dernière par φx, on a

$$(42) \qquad \varphi x=e^{ak}.E^{-k}\varphi x=e^{ak}.\varphi(x-k);$$

si donc $x=k$; on aura

$$\varphi k=e^{ak}.\varphi(k-k)=e^{ak}.\varphi(0)=C.e^{ak};$$

donc enfin

$$(43) \qquad \varphi x=C.e^{ax};$$

C étant une constante arbitraire qui, d'après notre méthode, est la valeur initiale de φx.

On voit, d'après cela, comment la forme de la fonction dépend de celle de l'échelle, et comment celle-ci sert à déterminer l'autre.

13. Cette méthode d'intégration est générale pour toutes les équations linéaires aux différentielles ou aux différences du premier ordre, à coefficiens constans. Elle consiste, comme l'on voit, 1.° à détacher l'échelle de l'équation proposée; 2.° à ramener cette échelle à celle E de l'état varié, au moyen des équations de définition (14), (15) et (16); 3.° à dégager E et à élever les deux membres à une même puissance arbitraire k; 4.° à diviser les deux membres par E^k, pour avoir l'unité dans le premier membre; 5.° à multiplier les deux membres par la fonction détachée φx, et à effectuer les opérations indiquées par l'échelle; 6.° enfin à faire $x=k$. Quelques exemples vont éclaircir cette marche.

14. Soit à intégrer l'équation aux différences

$$(44) \qquad \Delta_\xi \varphi x-a\varphi x=0;$$

en détachant les échelles, on a

$$(45) \qquad \Delta_\xi-a=0 \quad \text{ou} \quad E^\xi-1-a=0;$$

d'où l'on tire

$$E=(1+a)^{\frac{1}{\xi}} \quad \text{et} \quad E^k=(1+a)^{\frac{k}{\xi}};$$

donc

$$1=(1+a)^{\frac{k}{\xi}}.E^{-k};$$

et, en multipliant par la fonction détachée φx;

$$\varphi x=(1+a)^{\frac{k}{\xi}}.E^{-k}\varphi x=(1+a)^{\frac{k}{\xi}}\varphi(x-k);$$

si

si donc $x=k$, on a

$$\varphi k=(1+a)^{\frac{k}{\xi}}\varphi(k-k)=C.(1+a)^{\frac{k}{\xi}}\,;$$

donc enfin

$$(46) \qquad \varphi x=C(1+a)^{\frac{x}{\xi}}.$$

15. Soit encore à intégrer l'équation aux différences mêlées

$$(47) \qquad \mathrm{E}\varphi x-a\partial\varphi x-b\varphi x=0.$$

Son équation à échelles est

$$(48) \qquad \mathrm{E}-a\partial-b=0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{E}-a\,\mathrm{Log.E}-b=0.$$

Il s'agirait de tirer de cette équation la valeur de E, ce qui ne peut s'exécuter que par les séries. Soit α cette valeur, on aura

$$\mathrm{E}=\alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{E}^k=\alpha^k\,;$$

et par conséquent

$$1=\alpha^k\mathrm{E}^{-k}\,,$$

et, en multipliant par la fonction détachée,

$$\varphi x=\alpha^k\mathrm{E}^{-k}.\varphi x=\alpha^k\varphi(x-k)$$

d'où, en supposant $x=k$,

$$\varphi k=\alpha^k\varphi(k-k)=C.\alpha^k\,;$$

donc enfin

$$(49) \qquad \varphi x=C\alpha^x\,,$$

α étant déterminé par l'équation

$$(50) \qquad \alpha-a\,\mathrm{Log.}\alpha-b=0.$$

Le système des équations (49) et (50) est donc l'intégrale de la proposée.

Ces deux exemples font assez connaître la marche et l'uniformité de cette méthode d'intégration, pour les équations linéaire du premier ordre. Passons actuellement à l'intégration de celles des ordres supérieurs.

16. Si l'on a une équation linéaire, à coefficiens constans, telle que les suivantes :

$$(51) \qquad \partial^n\varphi x+a_1\partial^{n-1}\varphi x+a_2\partial^{n-2}\varphi x+\ldots\ldots+a_n\varphi x=0\,,$$

$$(52) \qquad \Delta^n_{\xi}\varphi x+a_1\Delta^{n-1}_{\xi}\varphi x+a_2\Delta^{n-2}_{\xi}\varphi x+\ldots\ldots+a_n\varphi x=0\,;$$

les échelles détachées donnent

$$(53)\qquad \partial^n+a_1\partial^{n-1}+a_2\partial^{n-2}+\ldots.+a_n=0\ ,$$

$$(54)\qquad \Delta_\xi^n+a_1\Delta_\xi^{n-1}+a_2\Delta_\xi^{n-2}+\ldots.+a_n=0\ .$$

En supposant que les racines de ces deux équations, résolues par rapport à ∂ et à Δ_ξ soient α_1, α_2, α_3, ... α_n, on pourra les mettre sous la forme

$$(\partial-\alpha_1)(\partial-\alpha_2)(\partial-\alpha_3)\ldots.(\partial-\alpha_n)=0\ ;$$

$$(\Delta_\xi-\alpha_1)(\Delta_\xi-\alpha_2)(\Delta_\xi-\alpha_3)\ldots.(\Delta_\xi-\alpha_n)=0\ ;$$

Ces deux équations sont satisfaites par les deux systèmes suivans

$$\partial-\alpha_1=0\ ,\quad \partial-\alpha_2=0\ ,\quad \partial-\alpha_3=0\ ,\ldots.\partial-\alpha_n=0\ ;$$

$$\Delta_\xi-\alpha_1=0\ ,\quad \Delta_\xi-\alpha_2=0\ ,\quad \Delta_\xi-\alpha_3=0\ ,\ldots.\Delta_\xi-\alpha_n=0\ .$$

En multipliant ces équations par la fonction détachée, elles deviennent

$$\partial\varphi x-\alpha_1\varphi x=0\ ,\ \partial\varphi x-\alpha_2\varphi x=0\ ,\ldots.\partial\varphi x-\alpha_n\varphi x=0\ ,$$

$$\Delta_\xi\varphi x-\alpha_1\varphi x=0\ ,\ \Delta_\xi\varphi x-\alpha_2\varphi x=0\ ,\ldots.\Delta_\xi\varphi x-\alpha_n\varphi x=0\ ;$$

dont les intégrales sont, d'après les n.os 12 et 14,

$$\varphi x=c_1e^{\alpha_1x}\ ,\quad \varphi x=c_2e^{\alpha_2x}\ ,\ldots..\varphi x=c_ne^{\alpha_nx}\ ;$$

$$\varphi x=c_1(1+\alpha_1)^{\frac{x}{\xi}}\ ,\quad \varphi x=c_2(1+\alpha_2)^{\frac{x}{\xi}}\ ,\ldots.\ \varphi x=c_n(1+\alpha_n)^{\frac{x}{\xi}}\ ;$$

et, puisque les deux équations proposées sont linéaires, leurs intégrales complettes seront les sommes de ces deux systèmes d'intégrales particulières ; elles seront, par conséquent,

$$(55)\qquad \varphi x=c_1e^{\alpha_1x}+c_2e^{\alpha_2x}+c_3e^{\alpha_3x}+\ldots.c_ne^{\alpha_nx}\ ,$$

$$(56)\qquad \varphi x=c_1(1+\alpha_1)^{\frac{x}{\xi}}+c_2(1+\alpha_2)^{\frac{x}{\xi}}+\ldots.c_n(1+\alpha_n)^{\frac{x}{\xi}}.$$

Notre méthode d'intégration, pour les équations linéaires des ordres supérieurs, consiste donc à décomposer l'échelle en ses facteurs du premier degré, et à multiplier chacun de ces facteurs par la fonction détachée ; ce qui réduit l'intégration de ces équations à celle d'autant d'équations linéaires du premier ordre qu'il y a de facteurs.

17. Pour completter cette théorie, il nous faut examiner en par-

ticulier le cas où l'équation aux échelles a des racines égales. Dans ce cas, qui a toujours plus ou moins embarrassé les géomètres (*), les intégrales cessent d'être complettes ; et il faut, pour les rendre telles, recourir à une nouvelle considération. Jusqu'à présent, on a généralement employé celle de l'infini, qui est peu satisfaisante. Nous allons la remplacer par une autre plus simple et plus rigoureuse, et que, pour plus de clarté et de brièveté, nous appliquerons à un exemple.

18. Supposons que l'équation (53) ait trois racines égales $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$, on aura $(\partial-\alpha_1)^3=0$. On ne satisferait qu'imparfaitement à cette équation, en supposant $\partial-\alpha_1=0$; car il faut exprimer que c'est $(\partial-\alpha_1)^3$ qui est zéro, et non pas seulement $(\partial-\alpha_1)$ ni $(\partial-\alpha_1)^2$. Pour exprimer cette circonstance, j'observe qu'on a

$$e^{\partial-\alpha_1}=1+(\partial-\alpha_1)+\frac{1}{1.2}(\partial-\alpha_1)^2+\frac{1}{1.2.3}(\partial-\alpha_1)^3+\ldots\ldots ;$$

dire donc que $(\partial-\alpha_1)^3=0$, est la même chose que de supposer l'équation suivante :

$$e^{\partial-\alpha_1}=1+(\partial-\alpha_1)+\tfrac{1}{2}(\partial-\alpha_1)^2.$$

Soit actuellement μ tel qu'on ait $e^{\mu}=1+\mu+\frac{1}{2}\mu^2$; ce qui suppose aussi $\mu^3=0$; on aura évidemment $\partial-\alpha_1=\mu$; donc $E=e^{\partial}=e^{\alpha_1+\mu}$ $=e^{\alpha_1}.e^{\mu}=(1+\mu+\frac{1}{2}\mu^2)e^{\alpha_1}$; d'où on tire, par notre marche ordinaire,

$$(58) \qquad \varphi x=c(1+\mu+\tfrac{1}{2}\mu^2)^x.e^{\alpha_1 x}.$$

Or, à cause de $\mu^3=0$, on a $(1+\mu+\frac{1}{2}\mu^2)^x=1+(\mu+\frac{1}{2}\mu^2)\frac{x}{1}$ $+\mu^2.\frac{x}{1}.\frac{x-1}{2}$; valeur qu'on peut mettre sous la forme $1+\mu_1 x+\mu_2 x^2$; l'équation (58) devient alors

$$(59) \qquad \varphi x=c(1+\mu_1 x+\mu_2 x^2)e^{\alpha_1 x}.$$

Cette intégrale satisfait à

$$(60) \qquad (\partial-\alpha_1)^3\varphi x,$$

indépendamment des relations qui existent entre μ_1 et μ_2. En effet,

(*) Voyez les pages 46 et 139 de ce volume. J. D. G.

bien que les intégrales qu'on déduirait des équations $(\partial-\alpha_1)=0$ et $(\partial-\alpha_1)^2=0$ ne soient pas les intégrales complettes de l'équation (60), elles doivent néanmoins y satisfaire, et en être des intégrales particulières. Or, l'intégrale particulière tirée de $(\partial-\alpha_1)=0$ est $\varphi x=ce^{\alpha_1 x}$, et celle tirée de $(\partial-\alpha_1)^2=0$ est, par le procédé même dont il est question, $\varphi x=c(1+\mu' x)e^{\alpha_1 x}$, μ' étant tel que $e^{\mu'}=1+\mu'$; donc, puisque la proposée est satisfaite, à la fois, par les équations

$$\varphi x=ce^{\alpha_1 x},$$
$$\varphi x=ce^{\alpha_1 x}+c\mu' xe^{\alpha_1 x},$$
$$\varphi x=ce^{\alpha_1 x}+c\mu_1 xe^{\alpha_1 x}+c\mu_2 x^2 e^{\alpha_1 x},$$

il s'ensuit, en combinant les deux premières valeurs de φx, qu'elle est aussi satisfaite par $\varphi x=c\mu' xe^{\alpha_1 x}$, quelle que soit la nature de la constante $c\mu'$, qui sort du calcul, comme facteur commun à tous les termes; donc aussi $\varphi x=c\mu_1 xe^{\alpha_1 x}$ satisfait encore à la proposée, indépendamment de la valeur de la constante $c\mu_1$; donc enfin $\varphi x= c\mu_2 x^2 e^{\alpha_1 x}$ satisfera aussi la proposée, puisqu'elle est linéaire, indépendamment de la valeur de la constante $c\mu_2$. On peut donc remplacer les deux constantes $c\mu_1$ et $c\mu_2$ par deux constantes arbitraires quelconques c_2 et c_3, et donner ainsi à l'intégrale de l'équation (60) la forme connue

$$(61) \qquad \varphi x=(c_1+c_2 x+c_3 x^2)e^{\alpha_1 x}.$$

On trouverait de même, pour un nombre i de racines égales,

$$(62) \qquad \varphi x=(c_1+c_2 x+c_3 x^2+\ldots+c_i x^{i-1})e^{\alpha_1 x};$$

et l'intégrale complette de l'équation (51) deviendrait alors

$$(63) \quad \varphi x=(c_1+c_2 x+c_3 x^2+\ldots+c_i x^{i-1})e^{\alpha_1 x}+c_{i+1}e^{\alpha_{i+1} x}+\ldots+c_n e^{\alpha_n x}.$$

Le principe, ainsi que le procédé de cette méthode, sont entièrement les mêmes, quelle que soit la nature des échelles qui ont des facteurs égaux; ils ont, comme tout le reste de la méthode, le mérite de l'uniformité.

§. II.

De la séparation des échelles, dans les fonctions à plusieurs variables.

19. Jusqu'à présent, nous n'avons appliqué la méthode de séparation des échelles qu'à des fonctions d'une seule variable ; mais il est évident qu'en faisant sur $F(x, y, z)=0$ les mêmes raisonnemens que nous avons faits sur $F(x, y)=0$, on arriverait aux mêmes conclusions, et qu'ainsi la légitimité de cette méthode, pour les fonctions à plusieurs variables, se trouve aussi bien démontrée que pour les fonctions d'une seule variable. Nous nous contenterons donc d'établir les notations et les principales relations de définition entre les échelles ou signes de diverses espèces de différentiations des fonctions à plusieurs variables, et nous donnerons quelques exemples d'application de la méthode. Pour plus de simplicité, nous ne considérerons que des fonctions de deux variables indépendantes ; il sera aisé ensuite d'étendre la méthode à des fonctions d'un plus grand nombre de variables.

20. Soit une fonction de deux variables $\varphi(x, y)$; nous indiquerons sa différentielle totale par ∂ ; sa différentielle partielle, en ne faisant varier que x, par $\partial^{1,}$; sa différentielle, relative à la variabilité de y, par $\partial^{,1}$; de sorte qu'on aura

$$\partial\varphi(x, y)=\partial^{1,}\varphi(x, y)+\partial^{,1}\varphi(x, y), \qquad (64)$$

et, en détachant les échelles,

$$\partial=\partial^{1,}+\partial^{,1}. \qquad (65)$$

Nous représenterons de même par E et par Δ l'état varié et la différence totale, lorsque les accroissemens de x et de y seront chacun égal à 1 ; ainsi nous aurons

$$\varphi(x+1, y+1)=E\varphi(x, y)=\varphi(x, y)+\Delta\varphi(x, y)=e^{\partial}.\varphi(x, y), \qquad (66)$$

et par conséquent, en détachant les échelles,

$$E=1+\Delta=e^{\partial}. \qquad (67)$$

Nous indiquerons par $E^{1,}$ et par $\Delta^{1,}$ l'état varié partiel et la différence partielle, par rapport à x, lorsque cette variable devient $x+1$; et de même par $E^{,1}$ et par $\Delta^{,1}$ l'état varié partiel et la différence partielle, par rapport à y, lorsque y devient $y+1$. Ainsi nous aurons

$$(68)\qquad E^{1,}=1+\Delta^{1,}=e^{\partial^{1,}},\qquad E^{,1}=1+\Delta^{,1}=e^{\partial^{,1}}.$$

Ces équations, combinées avec celles (65) et (67), donnent

$$(69)\qquad E=e^{\partial^{1,}+\partial^{,1}}=e^{\partial^{1,}}.e^{\partial^{,1}}=E^{1,}.E^{,1}=(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1}),$$

$$(70)\qquad \Delta=E-1=e^{\partial^{1,}+\partial^{,1}}-1=E^{1,}.E^{,1}-1=(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})-1$$
$$=\Delta^{1,}+\Delta^{,1}+\Delta^{1,}.\Delta^{,1}=\Delta^{1,}+\Delta^{,1}.E^{1,}=\Delta^{,1}+\Delta^{1,}.E^{,1};$$

d'où l'on tire

$$(71)\qquad \Delta^{m}=(e^{\partial^{1,}+\partial^{,1}}-1)^{m}=(\Delta^{1,}+\Delta^{,1}.E^{1,})^{m}=(\Delta^{,1}+\Delta^{1,}.E^{,1})^{m}.$$

21. Lorsque les accroissemens des variables ne sont plus égaux à l'unité, et représentés par ξ, pour celui de x, et par υ, pour celui de y, nous indiquerons les états variés partiels par $E^{\xi,}$ et $E^{,\upsilon}$, les différences partielles par $\Delta^{1,}_{\xi,}$ et $\Delta^{,1}_{,\upsilon}$, l'état varié total par $E^{\xi,\upsilon}$ et la différence totale par $\Delta_{\xi,\upsilon}$. De cette manière, la notation indique, en même temps, la valeur des accroissemens des variables; ce qui est nécessaire, comme on va le voir par les relations suivantes:

$$(72)\quad E^{\xi,}=1+\Delta^{1,}_{\xi,}=(1+\Delta^{1,})^{\xi}=e^{\xi\partial^{1,}},\quad E^{,\upsilon}=1+\Delta^{,1}_{,\upsilon}=(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}=e^{\upsilon\partial^{,1}}.$$

$$(73)\quad E^{\xi,\upsilon}=1+\Delta_{\xi,\upsilon}=E^{\xi,}.E^{,\upsilon}=(1+\Delta^{1,}_{\xi,})(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})=(1+\Delta^{1,})^{\xi}(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}=e^{\xi\partial^{1,}+\upsilon\partial^{,1}}.$$

De là on déduit

$$(74)\quad \Delta^{1,}_{\xi,}=E^{\xi,}-1=(1+\Delta^{1,})^{\xi}-1=e^{\xi\partial^{1,}}-1,\quad \Delta^{,1}_{,\upsilon}=E^{,\upsilon}-1=(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}-1=e^{\upsilon\partial^{,1}}-1;$$

$$(75)\quad \Delta_{\xi,\upsilon}=E^{\xi,\upsilon}-1=E^{\xi,}.E^{,\upsilon}-1=(1+\Delta^{1,}_{\xi,})(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})-1=(1+\Delta^{1,})^{\xi}(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}-1$$
$$=\Delta^{1,}_{\xi,}+\Delta^{,1}_{,\upsilon}E^{\xi,}=\Delta^{,1}_{,\upsilon}+\Delta^{1,}_{\xi,}E^{,\upsilon}=e^{\xi\partial^{1,}+\upsilon\partial^{,1}}-1.$$

$$(76)\quad \Delta^{1,}=E^{1,}-1=(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{1}{\xi}}-1=e^{\partial^{1,}}-1,\ \Delta^{,1}=E^{,1}-1=(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{1}{\upsilon}}-1=e^{\partial^{,1}}-1;$$

$$(77)\quad \Delta=E-1=E^{1,}.E^{,1}-1=(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{1}{\xi}}(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{1}{\upsilon}}-1=e^{\partial}-1=e^{\partial^{1,}+\partial^{,1}}-1.$$

Et de là on tire

$$(78)\quad \Delta^{m,n}_{\xi,\upsilon}=\Delta^{m,}_{\xi,}.\Delta^{,n}_{,\upsilon}=(E^{\xi,}-1)^m(E^{,\upsilon}-1)^n=\{(1+\Delta^{1,})^{\xi}-1\}^m\{(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}-1\}^n=(e^{\xi\partial^{1,}}-1)^m(e^{\upsilon\partial^{,1}}-1)^n\;;$$

$$(79)\quad \Delta^{m,n}=\Delta^{m,}.\Delta^{,n}=(E^{1,}-1)^m(E^{,1}-1)^n=\{(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{1}{\xi}}-1\}^m\{(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{1}{\upsilon}}-1\}^n=(e^{\partial^{1,}}-1)^m(e^{\partial^{,1}}-1)^n\;;$$

$$(80)\quad \Delta^{m}_{\xi,\upsilon}=(E^{\xi,\upsilon}-1)^m=\{(1+\Delta^{1,}_{\xi,})(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})-1\}^m\{(1+\Delta^{,1})^{\xi}(1+\Delta^{,1})^{\upsilon}-1\}^m$$
$$=(\Delta^{1,}_{\xi,}+\Delta^{,1}_{,\upsilon}.E^{\xi,})^m=(\Delta^{,1}_{,\upsilon}+\Delta^{1,}_{\xi,}.E^{,\upsilon})^m=(e^{\xi\partial^{1,}+\upsilon\partial^{,1}}-1)^m.$$

$$(81)\quad \Delta^{-m}_{\xi,\upsilon}=\Sigma^{m}_{\xi,\upsilon}=(E^{\xi,\upsilon}-1)^{-m}=(\Delta^{1,}_{\xi,}+\Delta^{,1}_{,\upsilon}.E^{\xi,})^{-m}=(\Delta^{,1}_{,\upsilon}+\Delta^{1,}_{\xi,}.E^{,\upsilon})^{-m}$$
$$=\Sigma^{m,}_{\xi,}(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon}.\Sigma^{1,}_{\xi,}.E^{\xi,})^{-m}=\Sigma^{,m}_{,\upsilon}(1+\Delta^{1,}_{\xi,}.\Sigma^{,1}_{,\upsilon}.E^{,\upsilon})^{-m}=(e^{\xi\partial^{1,}+\upsilon\partial^{,1}}-1)^{-m}.$$

On déduit aussi des équations (72) et (73)

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned}\partial^{1,}&=\mathrm{Log}.E^{1,}=\mathrm{Log}.(1+\Delta^{1,})=\frac{1}{\xi}\mathrm{Log}.(1+\Delta^{1,}_{\xi,})=\mathrm{Log}.(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{1}{\xi}}\,,\\ \partial^{,1}&=\mathrm{Log}.E^{,1}=\mathrm{Log}.(1+\Delta^{,1})=\frac{1}{\upsilon}\mathrm{Log}.(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})=\mathrm{Log}.(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{1}{\upsilon}}\,,\end{aligned}\right.$$

$$(83)\quad \partial=\partial^{1,}+\partial^{,1}=\mathrm{Log}.E^{1,}+\mathrm{Log}.E^{,1}=\mathrm{Log}.(E^{1,}.E^{,1})=\mathrm{Log}.E=\mathrm{Log}.(1+\Delta^{1,})+\mathrm{Log}.(1+\Delta^{,1})$$
$$=\mathrm{Log}.\{(1+\Delta^{1,})(1+\Delta^{,1})\}=\frac{1}{\xi}\mathrm{Log}.(1+\Delta^{1,}_{\xi,})+\frac{1}{\upsilon}\mathrm{Log}.(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})=\mathrm{Log}.\{(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{1}{\xi}}(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{1}{\upsilon}}\}.$$

$$(84)\quad \partial^{m}=(\partial^{1,}+\partial^{,1})^m=\partial^{m,}(1+\textstyle\int^{1,}.\partial^{,1})^m=\partial^{,m}(1+\int^{,1}.\partial^{1,})^m\,.$$

$$(85)\quad \partial^{-m}\textstyle\int^{m}=(\partial^{1,}+\partial^{,1})^{-m}=\int^{m,}(1+\int^{1,}.\partial^{,1})^{-m}=\int^{,m}(1+\int^{,1}.\partial^{1,})^{-m}\,,$$

où $\int$ indique l'opération inverse de ∂; de sorte que $\int=\partial^{-1}$. Il a, avec le signe d'intégration ordinaire, le rapport suivant : $\int^{1,}=\int dx$, $\int^{,1}=\int dy$.

22. Toutes ces équations ne sont que des relations de définition, entre les différentes échelles de différentiation, ou des résultats qui en dérivent immédiatement. En les multipliant par $\varphi(x,y)$, elles offrent autant de

théorèmes généraux, plus ou moins remarquables. Les équations (85) donnent deux expressions en séries de l'intégrale d'un ordre quelconque d'une fonction à deux variables. En y faisant $m=1$, on a les deux séries de Jean Bernouilli. Les équations (81) donnent des séries analogues, pour les différences finies. On pourrait tirer de toutes ces équations une foule d'autres conséquences, en faisant sur chaque membre des opérations équivalentes (sans y introduire des variables), et multipliant les résultats par $\varphi(x,y)$; on obtiendrait ainsi autant de théorèmes généraux qu'on voudrait. Nous nous contenterons, comme pour les fonctions d'une seule variable, d'en tirer une formule générale d'interpolation, pour les séries doubles.

Par le même procédé qui nous a donné l'équation (18), on obtient

$$(86)\quad \Delta^{m,n}_{\theta,\omega}=\Delta^{m,}_{\theta,}.\Delta^{,n}_{,\omega}=\{(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{\theta}{\xi}}-1\}^{m}.\{(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{\omega}{\upsilon}}-1\}^{n};$$

et, en multipliant par $\varphi(x,y)$

$$(87)\quad \Delta^{m,n}_{\theta,\omega}\varphi(x,y)=\{(1+\Delta^{1,}_{\xi,})^{\frac{\theta}{\xi}}-1\}^{m}.\{(1+\Delta^{,1}_{,\upsilon})^{\frac{\omega}{\upsilon}}\varphi-1\}^{n}.(x,y).$$

Au moyen de cette formule, on passe d'un système de différences, relatives à des accroissemens ξ et υ, à un autre système de différences, relatives à des accroissemens θ et ω; ce qui donne la solution la plus générale de l'interpolation des séries doubles.

23. Nous avons vu, au n.° 5, qu'une formule quelconque, entre des quantités arbitraires, pouvait être considérée comme une équation à échelles, et nous avons fait voir, par deux exemples, qu'en multipliant ses deux membres par une fonction de x, on obtenait, avec beaucoup de facilité, des théorèmes, soit connus soit nouveaux. Nous pourrions faire des applications semblables, pour les fonctions à plusieurs variables; mais, pour ne pas trop grossir ce mémoire, nous laisserons cet exercice au lecteur, et nous passerons de suite à l'intégration des équations linéaires à plusieurs variables.

Les principes et la marche de la méthode étant les mêmes dans ce cas que dans celui des équations linéaires à une seule

variable, nous ne répéterons pas ce que nous avons dit plus haut, sur ce sujet, et nous passerons de suite aux applications.

24. Soit à intégrer l'équation aux différentielles partielles

$$(88)\qquad \partial^{1,}\varphi(x,y)=a\partial^{,1}\varphi(x,y)+b\varphi(x,y).$$

En détachant les échelles, on a

$$(89)\qquad \partial^{1,}=a\partial^{,1}+b.$$

ou bien $\text{Log.}E^{1,}=a\text{Log.}E^{,1}+b=\text{Log.}E^{,a}+\text{Log.}e^{b}=\text{Log.}(e^{b}.E^{,a})$; donc $E^{1,}=e^{b}.E^{,a}$, et par conséquent $E^{k,}=e^{bk}.E^{,ak}$, et ensuite $1=e^{bk}.E^{-k,}.E^{,ak}=e^{bk}.E^{-k,ak}$. En multipliant par la fonction détachée $\varphi(x,y)$, on trouve

$$\varphi(x,y)=e^{bk}.E^{-k,ak}.\varphi(x,y)=e^{bk}.\varphi(x-k,y+ak).$$

Si l'on a $x=k$, cette expression devient

$$\varphi(k,y)=e^{bk}.\varphi(0,y+ak)=e^{bk}.f(y+ak);$$

où f désigne une fonction arbitraire; on a donc, en général

$$(90)\qquad \varphi(x,y)=e^{bx}.f(y+ax).$$

Si l'on avait résolu l'équation aux échelles, par rapport à $E^{,1}$, au lieu de la résoudre par rapport à $E^{1,}$, on aurait trouvé pour intégrale

$$\varphi(x,y)=e^{-\frac{by}{a}}.f\left(x+\frac{y}{a}\right);$$

mais il est évident que cette intégrale ne diffère qu'en apparence de (90).

25. Soit à intégrer, en second lieu, l'équation aux différences partielles

$$(91)\qquad \varphi(x+\xi,y)=a\varphi(x,y+\upsilon)+b\varphi(x,y),$$

ou

$$E^{\xi,}\varphi(x,y)=aE^{,\upsilon}\varphi(x,y)+b\varphi(x,y);$$

l'équation aux échelles sera

$$(92)\qquad E^{\xi,}=aE^{,\upsilon}+b,$$

d'où on tire $E^{k,}=(aE^{,\upsilon}+b)^{\frac{k}{\xi}}$, et par conséquent $1=(aE^{,\upsilon}+b)^{\frac{k}{\xi}}.E^{-k,}$; donc en multipliant par la fonction,

$$\varphi(x,y)=(aE^{,\upsilon}+b)^{\frac{k}{\xi}}.E^{-k,}\varphi(x,y)=(aE^{,\upsilon}+b)^{\frac{k}{\xi}}.\varphi(x-k,y)$$

$$=\{a^{\frac{k}{\xi}}.E^{\nu\frac{k}{\xi}}+\frac{b}{\xi}ka^{\frac{k}{\xi}-1}.E^{\nu(\frac{k}{\xi}-1)}+\frac{1}{2}(\frac{b}{\xi})^2k(k-\xi)a^{\frac{k}{\xi}-2}.E^{\nu(\frac{k}{\xi}-2)}$$

$$+\frac{1}{6}(\frac{b}{\xi})^3k(k-\xi)(k-2\xi)a^{\frac{k}{\xi}-3}.E^{\nu(\frac{k}{\xi}-3)}+\ldots\}\varphi(x-k,y)$$

$$=a^{\frac{k}{\xi}}\varphi\{x-k,y+\nu.\frac{k}{\xi}\}+\frac{b}{\xi}ka^{\frac{k}{\xi}-1}\varphi\{x-k,y+\nu(\frac{k}{\xi}-1)\}$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{b}{\xi})^2k(k-\xi)a^{\frac{k}{\xi}-2}.\varphi\{x-k,y+\nu(\frac{k}{\xi}-2)\}+\ldots$$

Si $x=k$ cette expression devient

$$\varphi(k,y)=a^{\frac{k}{\xi}}f(y+\nu\frac{k}{\xi})+\frac{b}{\xi}ka^{\frac{k}{\xi}-1}.f\{y+\nu(\frac{k}{\xi}-1)\}$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{b}{\xi})^2k(b-\xi)a^{\frac{k}{\xi}-2}.f\{y+\nu(\frac{k}{\xi}-2)\}+\ldots$$

donc enfin

$$(93)\quad \varphi(x,y)=a^{\frac{x}{\xi}}f(y+\nu.\frac{x}{\xi})+\frac{b}{\xi}xa^{\frac{x}{\xi}-1}.f\{y+\nu(\frac{x}{\xi}-1)\}$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{b}{\xi})^2x(x-\xi)a^{\frac{x}{\xi}-2}.f\{y+\nu(\frac{x}{\xi}-2)\}+\ldots$$

Si l'on avait commencé le développement de $(aE^{\prime\nu}+b)^{\frac{k}{\xi}}$ par le terme b, on aurait obtenu

$$(94)\quad \varphi(x,y)=b^{\frac{x}{\xi}}fy+\frac{a}{\xi}xb^{\frac{x}{\xi}-1}.f(y+\nu)$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{a}{\xi})^2x(x-\xi)b^{\frac{x}{\xi}-2}.f(y+2\nu)+\ldots$$

Ces deux intégrales ne coïncident qu'autant qu'elles se terminent; ce qui n'arrive que dans deux cas : savoir, 1.° quand $\xi=1$; 2.° quand $\frac{x}{\xi}$ est un nombre entier positif. Hors ces deux cas, les deux intégrales vont à l'infini, et diffèrent entre elles comme deux développemens de la même fonction commencés par les deux extrémités.

26. Soit enfin l'équation aux différences mêlées partielles

$$(95)\quad \varphi(x+\xi,y)=a\partial^{\prime 1}\varphi(x,y),\quad\text{ou}\quad E^{\xi}\varphi(x,y)=a\partial^{\prime 1}\varphi(x,y).$$

On aura, en détachant les échelles,

$$(96)\quad E^{\xi}=a\partial^{\prime 1};$$

ce qui donne $E^{k,} = a^{\frac{k}{\xi}} \partial'^{\frac{k}{\xi}}$, et $1 = a^{\frac{k}{\xi}} \partial'^{\frac{k}{\xi}} E^{-k}$; d'où on tire, par notre procédé ordinaire

$$(97) \qquad \varphi(x, y) = a^{\frac{x}{\xi}} \partial'^{\frac{x}{\xi}} fy.$$

Si de l'échelle (96) on avait tiré la valeur de $E^{,1}$, on aurait trouvé $E^{,1} = e^{\frac{E^{\xi,}}{a}}$ et par suite $E^{,k} = e^{\frac{kE^{\xi,}}{a}}$, $1 = e^{\frac{kE^{\xi}}{a}} E^{,-k}$; ce qui donne, en multipliant par la fonction détachée

$$\varphi(x, y) = e^{\frac{kE^{\xi,}}{a}} . E^{,-k} \varphi(x, y) = e^{\frac{kE^{\xi,}}{a}} \varphi(x, y-k)$$

$$= \left\{1 + \frac{k}{a} E^{\xi,} + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^2 E^{2\xi,} + \frac{1}{6}\left(\frac{k}{a}\right)^3 E^{3\xi,} + \ldots\right\} \varphi(x, y-k)$$

$$= \varphi(x, y-k) + \frac{k}{a} \varphi(x+\xi, y-k) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^2 \varphi(x+2\xi, y-k) + \ldots\ldots$$

donc, si $y = k$

$$\varphi(x, k) = fx + \frac{k}{a} f(x+\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{a}\right)^2 f(x+2\xi) + \ldots\ldots$$

et enfin

$$(98) \qquad \varphi(x, y) = fx + \frac{y}{a} f(x+\xi) + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{a}\right)^2 f(x+2\xi) + \ldots\ldots$$

Ces exemples suffisent pour indiquer l'esprit de la méthode, dans l'intégration des équations linéaires du premier ordre à plusieurs variables. Passons à celle des équations linéaires à plusieurs variables dont l'ordre est plus élevé.

27. Lorsque l'équation aux échelles d'une équation linéaire d'un ordre supérieur est décomposable en facteurs du premier degré, chacun de ces facteurs, multiplié par la fonction détachée et égalé à zéro, fournit une équation linéaire du premier ordre, qu'on intègre par le procédé que nous venons d'exposer; et la somme de ces intégrales particulières est l'intégrale complette de la proposée. Mais, lorsque l'échelle n'est pas décomposable en facteurs du premier degré, il faut avoir recours à la méthode d'approximation que nous allons exposer par un exemple.

28. Soit l'équation aux différences partielles

$$(99)\quad \left.\begin{aligned} &A\varphi(x,y)+B\partial^{1,}\varphi(x,y)+C\partial^{2,}.\varphi(x,y)+\ldots+N\partial^{n,}.\varphi(x,y)\\ &+B_1\partial^{,1}\varphi(x,y)+C_1\partial^{1,}\partial^{,1}.\varphi(x,y)+\ldots+N_1\partial^{n-1,}\partial^{,1}.\varphi(x,y)\\ &\qquad+C_2\partial^{,2}.\varphi(x,y)+\ldots+N_2\partial^{n-2,}\partial^{,2}.\varphi(x,y)\\ &\qquad\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\qquad\qquad+N_n\partial^{,n}.\varphi(x,y)\end{aligned}\right\}=0\,;$$

et supposons que son équation aux échelles

$$(100)\quad \left.\begin{aligned} &A+B\partial^{1,}+C\partial^{2,}+\ldots+N\partial^{n,}\\ &+B_1\partial^{,1}+C_1\partial^{1,}\partial^{,1}+\ldots+N_1\partial^{n-1,}\partial^{,1}\\ &\qquad+C_2\partial^{,2}+\ldots+N_2\partial^{n-2,}\partial^{,2}\\ &\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\qquad\qquad+N_n\partial^{,n}\end{aligned}\right\}=0\,,$$

ne soit pas susceptible d'être décomposée en facteurs du premier degré ; on pourra du moins en tirer, par la méthode du retour des suites, une valeur de $\partial^{1,}$ de cette forme

$$(101)\qquad \partial^{1,}=\alpha_1+\beta_1\partial^{,1}+\gamma_1\partial^{,2}+\delta_1\partial^{,3}+\ldots\,,$$

d'où l'on tirera

$$\mathrm{E}^{1,}=e^{\alpha_1+\beta_1\partial^{,1}+\gamma_1\partial^{,2}+\delta_1\partial^{,3}+}$$

et

$$\mathrm{E}^{k,}=e^{(\alpha_1+\beta_1\partial^{,1}+\gamma_1\partial^{,2}+\delta_1\partial^{,3}+\ldots)k}$$

$$=e^{\alpha_1k}+\mathrm{D}.e^{\alpha_1k}.\partial^{,1}+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.e^{\alpha_1k}\partial^{,2}+\tfrac{1}{2.3}\mathrm{D}^3.e^{\alpha_1k}.\partial^{,3}+\ldots\,;$$

D étant le signe de dérivation, et ne se rapportant qu'à α_1.

On tire de là, par notre procédé ordinaire,

$$(102)\quad \varphi(x,y)=e^{\alpha_1x}f_1y+\mathrm{D}.e^{\alpha_1x}.\partial^{,1}f_1y+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2.e^{\alpha_1x}.\partial^{,2}f_1y+\ldots;$$

cette expression peut se mettre sous la forme suivante, au moyen des échelles détachées

$$(103)\qquad \varphi(x,y)=e^{\mathrm{D}.\partial^{,1}}.e^{\alpha_1x}.f_1y\,;$$

où D ne se rapporte qu'à α_1, et $\partial^{,1}$ à y.

Cette

Cette intégrale n'est que particulière, mais on la complètera aisément, en considérant que α_1 est une des racines de l'équation

$$(104) \qquad A+B\alpha+C\alpha^2+\ldots\ldots+N\alpha^n=0\,,$$

et que β_1, γ_1, δ_1,.... se déduisent de α_1, d'une manière simple et uniforme, par le calcul des dérivations ; d'où il est facile de conclure que, si α_2, α_3, α_4,.... sont les autres racines de l'équation (104), on aura, pour chacune d'elles, une autre valeur de $\partial^{1,}$, et une intégrale particulière correspondante. La somme de toutes ces intégrales particulières sera l'intégrale complète de la proposée, qu'au moyen des échelles détachées, on peut mettre sous la forme suivante :

$$(105) \quad \varphi(x,y)=e^{\mathrm{D}.\partial^{,1}}.\{e^{\alpha_1 x}.f_1 y+e^{\alpha_2 x}.f_2 y+e^{\alpha_3 x}.f_3 y+\ldots+e^{\alpha_n x}.f_n y\}.$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire de supposer, pour ce qui précède, la résolution générale des équations. Comme il ne s'agit ici que d'approximation, il suffit que les valeurs de α_1, α_2, α_3,... α_n soient exprimées en séries ; ce qui est toujours possible, soit par la méthode de M. Lagrange (*Mémoires de Berlin*, 1768), soit par le n.° 285 du *Calcul des dérivations*.

Dans tous les cas semblables, quelle que soit la nature des échelles, la marche de la méthode est exactement la même, et n'a pas besoin de nouvelle explication.

29. Notre méthode d'intégration est donc générale, et applicable à tous les cas des équations linéaires, à coefficiens constans ; qu'elles soient aux différences ou aux différentielles, les unes et les autres totales ou partielles, séparées ou mêlées ; mais ce qu'elle a de particulier, c'est son uniformité constante, pour toutes ces espèces différentes d'équation ; uniformité qu'elle ne doit qu'à la séparation des échelles, dont elle est une des applications les plus intéressantes.

30. Les deux genres d'applications que je viens de présenter de la méthode de séparation des échelles, suffisent pour donner une idée de son importance, et de son utilité dans diverses branches de l'analise. Nous avons lieu d'espérer, d'après cela, qu'on nous

saura quelque gré d'avoir démontré la légitimité de cette méthode, en la déduisant des premiers principes du calcul. Ainsi, cette fameuse analogie entre les puissances et les différences, aperçue par Leibnitz, et devenue si féconde, entre les mains des premiers géomètres de nos jours, se trouve enfin, non seulement démontrée, mais prodigieusement étendue, et ramenée à une méthode de calcul rigoureuse, débarrassée des entraves qu'y mettait le passage alternatif des indices aux exposans, et des exposans aux indices.

31. Non seulement ces entraves gênent le calculateur, en l'obligeant de considérer les mêmes nombres, tantôt comme des exposans et tantôt comme des indices, mais elles ont encore retardé les progrès de la méthode et, qui plus est, elles ont induit en erreur des géomètres distingués, parce qu'ils n'ont pas saisi le vrai moment auquel il fallait repasser des exposans aux indices. Nous citerons, pour preuve de cette assertion, le développement fautif de $\Sigma\varphi x$, donné par MM. de Lorgna et Prony, dans le 3.me volume des *Mémoires de l'académie de Turin*, page 432, et dans le 4.me cahier du *Journal de l'école polytechnique*, page 539. Ces auteurs donnent, pour le développement de cette intégrale aux différences finies

$$(106)\qquad \Sigma\varphi x=\frac{1}{\varphi(x+1)}+\frac{1}{\varphi(x+2)}+\frac{1}{\varphi(x+3)}+\dots.$$

$$=\frac{1}{\varphi x+\Delta\varphi x}+\frac{1}{\varphi x+2\Delta\varphi x+\Delta^2\varphi x}+\frac{1}{\varphi x+3\Delta\varphi x+3\Delta^2\varphi x+\Delta^3\varphi x}+\dots;$$

tandis que la véritable expression, déduite de l'équation aux échelles

$$(107)\qquad \Sigma=\Delta^{-1}=(E-1)^{-1}=E^{-1}+E^{-2}+E^{-3}+\dots$$

est

$$(108)\qquad \Sigma\varphi x=\varphi(x-1)+\varphi(x-2)+\varphi(x-3)+\dots..$$

32. Cet exemple n'est pas le seul qu'on puisse citer. M. Brisson, dans son mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles, inséré dans le 14.me cahier du *Journal de l'école polytechnique*, se propose, pages 199 et 200, de donner le développement de $\delta^n u$, suivant les puissances de n. A cet effet, il fait $u=e^x v$, et il obtient

(109) $\partial^n u = \partial^n(e^x v) = e^x\{v + n\partial v + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}\partial^2 v + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}\partial^3 v + \ldots\}$;

il ordonne cette série suivant les puissances de n, en lui donnant la forme

(110) $\partial^n u = e^x(v + \frac{n}{1}A + \frac{n^2}{1.2}B + \frac{n^3}{1.2.3}C + \frac{n^4}{1.2.3.4}D + \ldots)$,

et il observe l'analogie qui existe entre les termes $A, B, C, \ldots$ et $\text{Log.}(1+b)$, $\{\text{Log.}(1+b)\}^2$, $\{\text{Log.}(1+b)\}^3, \ldots$ D'après cette analogie, il introduit la caractéristique λ, et représente $e^x A$ par $\lambda(e^x v) = \lambda(u)$; d'où il déduit

(111) $\partial^n u = u + \frac{n}{1}\lambda(u) + \frac{n^2}{1.2}\lambda^2(u) + \frac{n^3}{1.2.3}\lambda^3(u) + \ldots\ldots$

Voyons, d'après la théorie des échelles détachées, ce que signifie cette caractéristique λ, et si l'expression (111) est exacte.

L'équation (109) peut être mise sous la forme

(112) $\partial^n u = \partial^n(e^x v) = e^x(1+\partial)^n.v = e^x.e^{n\text{Log.}(1+\partial)}.v$.

En représentant $\text{Log.}(1+\partial)$ par ∂_1, et développant cette dernière expression, on obtient

(113) $\partial^n u = e^x.e^{n\partial_1}.v = e^x(v + \frac{n}{1}\partial_1 v + \frac{n^2}{1.2}\partial_1^2 v + \frac{n^3}{1.2.3}\partial_1^3 v + \ldots\ldots)$.

Notre ∂_1 est donc ce que M. Brisson a voulu représenter par λ; mais il se trompe certainement, en enveloppant e^x sous le signe λ. Pour avoir le développement de $\partial^n u$ suivant les puissances de la caractéristique λ ou ∂_1, il faut partir de son équation de définition $\partial_1 = \text{Log.}(1+\partial)$, d'où l'on tire $\partial = e^{\partial_1} - 1$, et par conséquent $\partial^n u = (e^{\partial_1} - 1)^n u$; ce qui est bien différent de l'expression (111), qui se réduit à $\partial^n u = e^{n\partial_1}.u$. La valeur de $\partial^n u$, que nous venons de trouver, ne donne plus le développement de cette quantité suivant les puissances de n; pour l'obtenir, il faut la mettre sous la forme $\partial^n u = e^{n\text{Log.}\partial}.u$; ce qui donne

(114) $\partial^n u = u + \frac{n}{1}(\text{Log}.\partial).u + \frac{n^2}{1.2}(\text{Log}.\partial)^2.u + \frac{n^3}{1.2.3}(\text{Log}.\partial)^3.u + \ldots,$

et fait voir que l'analogie que M. Brisson a cru entrevoir entre $\partial^n u$ et $a^n u$ est complète ; puisque le développement de ces deux expressions est le même, et ne diffère qu'en ce que a est un symbole de quantité et ∂ une caractéristique d'opération. Mais il y a cette différence, entre le développement (114) et celui de M. Brisson, que le premier procède suivant les puissances de $\text{Log}.\partial$, et le sien suivant celles de $\text{Log}.(1+\partial)$.

Cet exemple fournit une nouvelle preuve des erreurs que peut faire commettre l'analogie entre les puissances et les différences, lorsqu'on ne détache pas les échelles.

33. M. Brisson a cru entrevoir aussi le germe d'un nouveau calcul, dans sa caractéristique λ, qui est notre ∂_1. Feu mon frère était depuis long-temps en possession de la théorie de ce calcul, qu'il a étendue à des calculs de la même espèce, d'ordres supérieurs. Toute cette théorie repose sur l'équation aux échelles $\partial_1 = \text{Log}.(1+\partial)$. La caractéristique ∂_1 est à la caractéristique ∂ ce que celle-ci est à Δ des différences finies ; car, de même qu'on a $\partial_1 = \text{Log}.(1+\partial)$, on a aussi $\partial = \text{Log}.(1+\Delta)$. Ce nouveau calcul pourrait donc être appelé *Calcul différentiel du second ordre* ; il a évidemment son inverse, dont la caractéristique est $\int_1 = \partial_1^{-1}$, de sorte qu'on a $\int_1 = \{\text{Log}.(1+\partial)\}^{-1}$.

Si l'on fait de même $\partial_2 = \text{Log}.(1+\partial_1)$, $\partial_3 = \text{Log}.(1+\partial_2)$, ..., on aura les bases d'autant de nouveaux calculs différentiels, des 3me, 4me, ... ordres. Voici les relations de définition qui lient ces différens calculs entre eux.

$$E = 1+\Delta, \quad E_1 = 1+\partial, \quad E_2 = 1+\partial_1, \quad E_3 = 1+\partial_2, \ldots,$$

$$E = e^{\partial}, \quad E_1 = e^{\partial_1}, \quad E_2 = e^{\partial_2}, \quad E_3 = e^{\partial_3}, \ldots,$$

$$\Delta = e^{\partial} - 1, \quad \partial = e^{\partial_1} - 1, \quad \partial_1 = e^{\partial_2} - 1, \quad \partial_2 = e^{\partial_3} - 1, \ldots$$

Metz, le 7 de septembre 1811.

MÉCANIQUE.

Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques homogènes ;

Par M. J. PLANA, professeur d'astronomie à l'académie de Turin.

1. L'ON trouve, dans le premier volume de la nouvelle édition de la *Mécanique analitique* de M. Lagrange (pages 113—114), l'énoncé d'un procédé très-ingénieux, pour former la série qui donne l'attraction des ellipsoïdes homogènes, sur les points extérieurs à leur surface. J'ai remarqué que ce procédé peut être démontré, d'une manière assez directe et simple, en transformant les coordonnées de la surface du corps attirant, conformément à ce qui a été pratiqué par M. Yvory, dans son excellent mémoire, sur l'attraction des ellipsoïdes homogènes. (*)

2. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipsoïde ; $dM = dx dy dz$ l'élément de sa masse ; et a, b, c les coordonnées du point attiré. En posant

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

l'on sait qu'il suffit de connaître la valeur de V, pour en conclure

(*) Voyez les *Transactions philosophiques*, pour 1809 ; ou le *Nouveau bulletin des sciences*, par la société philomatique, tome III, n.° 62, 5.e année, novembre 1812, page 176. Voyez aussi le n.° 64 du même recueil, page 216.

par la simple différentiation, les attractions parallèles aux axes. (*)

Soient, pour plus de simplicité,

$$T=[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{-\frac{1}{2}}\ ; \quad X=ax+by+cz$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ ; \quad R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

d'où

$$T=[(r^2+R^2)-2X]^{-\frac{1}{2}}\ ;$$

ou, en développant la valeur de T,

$$T=(r^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}(r^2+R^2)^{-\frac{3}{2}}.2X+\frac{1.3}{2.4}(r^2+R^2)^{-\frac{5}{2}}.2^2X^2+\ldots;$$

Maintenant, si l'on conçoit que l'on ait développé les radicaux qui entrent dans cette série, il est évident que l'on réduira la valeur de T à une suite de termes de la forme $Ax^m.y^n.z^l$, dans lesquels A sera une fonction rationnelle et entière de a, b, c, $\frac{1}{r}$. Il suit de là que, pour former la série qui exprime la valeur de V, il est nécessaire d'avoir une formule propre à donner la valeur de l'intégrale

$$\int x^m.y^n.z^l.dM,$$

étendue à toute la masse de l'ellipsoïde. Or, il est clair qu'en plaçant l'origine des coordonnées au centre de l'ellipsoïde, l'on aura $\int x^m.y^n.z^l.dM=0$, toutes les fois que l'un des exposans m, n, l sera impair, puisque les mêmes élémens s'y trouveront, avec des signes contraires. Donc, il faudra commencer par supprimer, dans la valeur précédente de T, tous les termes multipliés par des puissances impaires de X; et il faudra ensuite, par la même raison, rejeter du développement des puissances paires de X tous les termes non compris dans la forme $A.x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}$. En désignant par X'^2, X'^4, X'^6, ... ce que deviennent par là les valeurs de X^2, X^4, X^6, ...; on aura, dans le cas présent,

---

(*) Voyez la *Mécanique céleste*, tome I, page 136, et tome II, page 13.

$$(A)\quad T=(r^2+R^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1.3}{2.4}(r^2+R^2)^{-\frac{5}{2}}.2^2.X'^2+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}(r^2+R^2)^{-\frac{9}{2}}.2^4.X'^4+..$$

3. Cela posé, cherchons une formule propre à donner la valeur de l'intégrale

$$\int\int\int.x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}.\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=P\,,$$

étendue à la masse entière de l'ellipsoïde.

En intégrant d'abord, depuis $x=-x'$ jusqu'à $x=+x'$, il viendra

$$P=-\frac{2}{2m+1}\int\int.x'^{2m+1}.y^{2n}.z^{2l}.\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Les valeurs de x', y, z, qui entrent dans cette intégrale, doivent être considérées comme appartenant à la surface de l'ellipsoïde; en conséquence, elles sont liées entre elles par l'équation

$$\frac{x'^2}{k^2}+\frac{y^2}{k'^2}+\frac{z^2}{k''^2}=1\;;$$

k, k', k'' désignant les demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde. Il est évident que l'on rend cette équation identique, en posant

$$x'=k\mathrm{Sin}.\theta\,;\; y=k'\mathrm{Cos}.\theta\mathrm{Sin}.\varphi\,;\; z=k''\mathrm{Cos}.\theta\mathrm{Cos}.\varphi. \quad (*)$$

L'on pourra donc introduire les variables θ et φ, à la place des variables y et z, en prenant, conformément au principe connu,

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-k'k''\mathrm{Sin}.\theta\mathrm{Cos}.\theta.\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\,; \quad (**)$$

d'où résulte, en substituant

$$P=\frac{2}{2m+1}k^{2m+1}.k'^{2n+1}.k''^{2l+1}.\int\int\mathrm{Sin}.\theta^{2m+2}.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1}.\mathrm{Sin}.\varphi^{2n}.\mathrm{Cos}.\varphi^{2l}.\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Pour peu que l'on examine maintenant la forme des expressions des variables x', y, z, en θ et φ, l'on comprendra sans peine qu'en intégrant, d'abord depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=200°$, et ensuite

(*) C'est principalement sur cette transformation que repose le beau travail de M. Yvory.

(**) Voyez le *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de M. Lacroix, tome II, page 203, n.° 528.

depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=100°$, l'on obtiendra la valeur de $\int\int\int . x^{2m} . y^{2n} . z^{2l} . dx dy dz$ relative à la moitié antérieure de l'ellipsoïde, et qu'en conséquence il suffira de doubler le résultat obtenu entre ces limites, pour que l'intégrale proposée soit étendue à la masse entière du corps.

Commençons l'intégration par rapport à φ. Il est facile de prouver que l'on a en général

$$\int d\varphi . \text{Sin.}\varphi^{2n} . \text{Cos.}\varphi^{2l} = \frac{1}{2n+1} \text{Sin.}\varphi^{2n+1} . \text{Cos.}\varphi^{2l-1} + \frac{2l-1}{2n+1} \int d\varphi . \text{Sin.}\varphi^{2n+2} . \text{Cos.}\varphi^{2l-2};$$

mais, en intégrant depuis $\varphi=0$ jusqu'à $\varphi=200°$, le premier terme de cette intégrale devient toujours nul; donc l'on aura, en continuant cette transformation,

$$\int d\varphi . \text{Sin.}\varphi^{2n} . \text{Cos.}\varphi^{2l} = \frac{2l-1}{2n+1} . \frac{2l-3}{2n+3} . \frac{2l-5}{2n+5} \dots \frac{1}{2n+2l-1} \int d\varphi \text{Sin.}\varphi^{2n+2l};$$

Or, par les formules connues, on trouve, entre les mêmes limites,

$$\int d\varphi . \text{Sin.}\varphi^{2n+2l} = \frac{1.3.5.7 \dots (2n+2l-1)}{2.4.6.8 \dots (2n+2l)} \varpi,$$

en nommant ϖ le rapport de la circonférence au diamètre.

Donc

$$\int d\varphi . \text{Sin.}\varphi^{2n} . \text{Cos.}\varphi^{2l} = \frac{1.3 \dots (2l-1)}{(2n+1)(2n+3) \dots (2n+2l-1)} . \frac{1.3 \dots (2n+2l-1)}{2.4 \dots (2n+2l)} \varpi;$$

ou bien, en réduisant,

$$(1) \int d\varphi \text{Sin.}\varphi^{2n} . \text{Cos.}\varphi^{2l} = \frac{[1.3.5 \dots (2n-1)][1.3.5 \dots (2l-1)]}{2.4.6 \dots (2n+2l)} . \varpi$$

Pour effectuer l'intégration par rapport à θ, remarquons que l'on a, en général,

$$\int d\theta . \text{Sin.}\theta^{2m+2} . \text{Cos.}\theta^{2n+2l+1} = -\frac{\text{Sin.}\theta^{2m+1} . \text{Cos.}\theta^{2n+2l+2}}{2m+2n+2l+3}$$
$$+ \frac{2m+1}{2m+2n+2l+3} \int d\theta . \text{Sin.}\theta^{2m} . \text{Cos.}\theta^{2n+2l+1};$$

mais, entre les limites $\theta=0$, $\theta=100°$, le premier terme du second membre de cette équation devient toujours nul; donc l'on aura, en continuant cette transformation,

$\int$

$$\int d\theta.\mathrm{Sin}.\theta^{2m+2}.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1} = \frac{(2m+1)(2m-1)\ldots\ldots.1}{(2m+2n+2l+3)(2m+2n+2l+1)..(2n+2l+3)}\int d\theta.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1};$$

or, par les formules connues, on trouve, entre les mêmes limites,

$$\int d\theta.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1} = \frac{2.4.6\ldots\ldots.(2n+2l)}{3.5.7\ldots.(2n+2l+1)};$$

partant

$$(2)\quad \int d\theta.\mathrm{Sin}.\theta^{2m+2}.\mathrm{Cos}.\theta^{2n+2l+1} = \frac{[1.3.5\ldots\ldots(2m+1)][2.4.6\ldots\ldots(2n+2l)]}{3.5.7\ldots.(2m+2n+2l+3)}.$$

En doublant le produit des formules (1) et (2), et posant

$$M = \frac{4\pi}{3}.kk'k''.$$

l'on obtient enfin

$$(B)\quad \int x^{2m}.y^{2n}.z^{2l}.dM = \frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)][1.3.5\ldots(2l-1)]}{5.7.9\ldots.(2m+2n+2l+3)}Mk^{2m}.k'^{2n}.k''^{2l}.$$

Ce beau théorème est dû à M. Lagrange. (*)

4. Reprenons actuellement la valeur de T donnée par la série (A), et remarquons qu'en conséquence du théorème renfermé dans la formule (B), la valeur de $V=\int T dM$ sera exprimée par une suite de la forme

$$V = M(Ak^{2m}.k'^{2n}.k''^{2l} + A'.k^{2m'}.k'^{2n'}.k''^{2l'} + \ldots\ldots),$$

où A, A',.... représentent des fonctions rationnelles et entières de a, b, c, $\frac{1}{r}$. Or, il est démontré que $\frac{V}{M}$ doit toujours être une fonction des excentricités de l'ellipsoïde (**), donc il doit nécessairement exister, entre les coefficiens A, A', A'',.... des rapports tels qu'ils réduiront la valeur précédente de $\frac{V}{M}$ à cette forme :

(*) Voyez les *Mémoires de l'académie de Berlin*, années 1792 et 1793, page 262.
(**) Voyez la *Mécanique céleste*.

$$\frac{V}{M} = B(k'^2-k^2)^p(k''^2-k^2)^q + B'(k'^2-k^2)^{p'}(k''^2-k^2)^{q'} + \ldots\ldots$$

Il suit de là que l'équation

$$B(k'^2-k^2)^p(k''^2-k^2)^q + B'(k'^2-k^2)^{p'}(k''^2-k^2)^{q'} + \ldots\ldots$$
$$= Ak^{2m}.k'^{2n}.k''^{2l} + A'k^{2m'}.k'^{2n'}.k''^{2l'} + \ldots\ldots$$

doit être identiquement vraie. Cette identité ne cesse pas de subsister, en faisant $k=0$, dans les deux membres de l'équation ; ainsi, l'on aura

$$\text{(C)}\ Bk'^{2p}.k''^{2q} + B'k'^{2p'}.k''^{2q'} + \ldots = A_{,}k'^{2\alpha}.k''^{2\beta} + A_{,,}k'^{2\alpha'}.k''^{2\beta'} + \ldots;$$

en nommant $A_{,}$, $A_{,,}$, $A_{,,,}$, ... les coefficiens des termes qui, dans le second membre de l'équation précédente, sont indépendans de k. La formule (B) nous fait voir que, pour obtenir les termes qui, dans la valeur de V, sont indépendans de k, il suffit de poser $x=0$, dans la valeur de T, donnée par la série (A). Il est évident que, par ce moyen, cette série revient à celle que l'on obtiendrait en développant le radical

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2by-2cz+y^2+z^2}},$$

suivant les puissances de y et z, en conservant seulement les termes de la forme $H.y^{2m}.z^{2n}$. L'intégrale d'un tel terme est, en vertu de la formule (B),

$$\frac{[1.3.5....(2m-1)][1.3.5(2n-1)]}{5.7.9....(2m+2n+3)} MH.k'^{2m}.k''^{2n};$$

et, d'après l'équation (C), si l'on change, dans ce résultat, k'^2 et k''^2 respectivement en k'^2-k^2 et k''^2-k^2, la fonction

$$\frac{[1.3.5....(2m-1)][1.3.5....(2n-1)]}{5.7.9....(2m+2n+3)}.MH.(k'^2-k^2)^m(k''^2-k^2)^n,$$

appartiendra au développement de la valeur de V. C'est en cela que consiste le procédé enseigné par M. Lagrange.

Turin, le 3 janvier 1813.

ANALISE.

Mémoire sur les fractions rationnelles;

Par M. de Stainville, répétiteur adjoint à l'école impériale polytechnique.



La décomposition des fractions rationnelles, qui se présente si souvent dans la théorie des suites, et dans le calcul intégral, a été présentée, par les analistes, de plusieurs manières diverses. En particulier on y a appliqué le calcul différentiel; mais cette application ne me paraît pas avoir été présentée sous le point de vue le plus simple et le plus lumineux; et c'est ce qui me détermine à y revenir ici.

Je considérerai successivement, dans ce mémoire, trois sortes de fractions rationnelles, savoir 1.° celles dont le dénominateur a tous ses facteurs inégaux; 2.° celles dont le dénominateur a tous ses facteurs égaux; 3.° celles dont le dénominateur a ses facteurs en partie égaux et en partie inégaux.

I. Soit, en général, $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur φx, d'un degré plus élevé que le numérateur, soit le produit des facteurs inégaux $x-a$, $x-b$, $x-c$, ...; en désignant par A,

B, C,.... les numérateurs des fractions partielles qui doivent respectivement avoir ces facteurs pour dénominateurs; on aura

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

d'où on conclura, en chassant les dénominateurs, et se rappelant que $\varphi x=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots..$

$$\begin{aligned}\psi x=&A(x-b)(x-c)\ldots..\\ &+B(x-a)(x-c)\ldots..\\ &+C(x-a)(x-b)\ldots..\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Cette équation étant identique, elle devra subsister encore, en y mettant successivement pour x les quantités a, b, c,....; observant donc que chacune de ces substitutions fait disparaître tous les termes du second membre, excepté un seul, il viendra

$$\begin{aligned}&\psi a=A(a-b)(a-c)\ldots..,\\ &\psi b=B(b-a)(b-c)\ldots..,\\ &\psi c=C(c-a)(c-b)\ldots..,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

D'un autre côté, en différentiant l'équation identique

$$\varphi x=(x-a)(x-b)(x-c)\ldots..,$$

on obtient cette autre équation identique

$$\begin{aligned}\varphi' x=&(x-b)(x-c)\ldots..\\ &+(x-a)(x-c)\ldots..\end{aligned}$$

$$+(x-a)(x-b)\ldots\ldots$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

laquelle, en y mettant successivement pour x les seconds termes a, b, c, ..., donne

$$\varphi'a=(a-b)(a-c)\ldots\ldots$$
$$\varphi'b=(b-a)(b-c)\ldots\ldots$$
$$\varphi'c=(c-a)(c-b)\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

divisant donc, par chacune de ces dernières, les équations correspondantes du précédent groupe, il viendra

$$\frac{\psi a}{\varphi' a}=A\,,\quad \frac{\psi b}{\varphi' b}=B\,,\quad \frac{\psi c}{\varphi' c}=C\,,\ldots.$$

Ainsi, si l'on forme une fraction dont le numérateur soit le même que celui de la fraction proposée, et dont le dénominateur soit la fonction prime de son dénominateur; en substituant successivement pour x, dans cette fraction, les seconds termes des dénominateurs des fractions partielles, pris avec des signes contraires, on obtiendra les numérateurs de
Soit, par exemple, la fraction
ces mêmes fractions.

$$\frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{6x^2-22x+18}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,;$$

le numérateur, divisé par la fonction prime du dénominateur, donnera

$$\frac{6x^2-22x+18}{3x^2-12x+11}\,;$$

en y faisant successivement $x=1$, 2, 3, on obtiendra $\frac{2}{2}=1$, $\frac{-2}{-1}=2$, $\frac{6}{2}=3$; de sorte qu'on aura

$$\frac{6x^2-22x+18}{x^3-6x^2+11x-6}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

On voit par là que, dans le cas particulier où le numérateur de la fraction proposée se trouverait être la fonction prime de son dénominateur, les numérateurs des fractions partielles se trouveraient tous égaux à l'unité, comme il résulte d'ailleurs de la théorie des différentielles logarithmiques.

II. Soit encore $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible, dont le dénominateur soit d'un degré plus élevé que le numérateur; mais supposons que ce dénominateur soit le produit de m facteurs égaux à $x-a$, en sorte qu'on ait $\varphi x=(x-a)^m$; on pourra alors écrire l'équation identique

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\psi\{a+(x-a)\}}{(x-a)^m}.$$

En développant le second membre de cette équation, par la *série de Taylor*, on obtiendra

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\psi a}{(x-a)^n}+\frac{\frac{1}{1}\psi' a}{(x-a)^{m-1}}+\frac{\frac{1}{1.2}\psi'' a}{(x-a)^{m-2}}+\ldots\ldots+\frac{\frac{1}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}a}{(x-a)^{m-n}}+\ldots.$$

D'où l'on voit que le numérateur d'une fraction partielle quelconque s'obtiendra, en formant une dérivée du numérateur de la fraction proposée dont l'ordre soit la différence entre l'exposant du dénominateur de la même fraction proposée et l'exposant du dénominateur de la fraction partielle dont il s'agit, en divisant ensuite cette fonction dérivée par le produit d'autant des premiers nombres naturels qu'il y a d'unités dans le nombre qui indique son ordre de dérivation, et en y mettant enfin pour x le second terme a du binôme $x-a$.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{3x^2-4x+2}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{3x^2-4x+2}{(x-1)^3}.$$

Le numérateur et ses dérivées successives, divisées respectivement par 1 et 2, sont

$$3x^2-4x+2\,, \quad 6x+4\,, \quad 3\,;$$

en y faisant $x=1$, il vient

$$1\,, \quad 2\,, \quad 3\,;$$

et on a conséquemment

$$\frac{3x^2-4x+2}{(x-1)^3}=\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}.$$

III. Soit enfin $\frac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle irréductible, dont le dénominateur, d'un degré plus élevé que son numérateur, n'ait ni tous ses facteurs égaux ni tous ses facteurs inégaux. Soit $\varphi x=(x-a)^m \mathrm{f}x$; la fonction $\mathrm{f}x$ pouvant renfermer ou ne point renfermer de facteurs égaux, mais n'en renfermant aucun qui soit égal à $x-a$. Soit posé

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{\mathrm{F}x}{(x-a)^m}+\frac{\Phi x}{\mathrm{f}x}.$$

Si l'on pouvait déterminer les fonctions $\mathrm{F}x$ et Φx, le problème qui nous occupe pourrait être considéré comme résolu, puisque la décomposition de la première fraction du second membre se rapporterait au second cas que nous avons traité, et que la décomposition de l'autre se rapporterait soit au premier soit au cas présent, suivant que les facteurs de $\mathrm{f}x$ seraient ou ne seraient pas tous inégaux.

Au lieu de déterminer immédiatement $\mathrm{F}x$, il serait préférable de chercher d'abord $\mathrm{F}a$, $\mathrm{F}'a$, $\mathrm{F}''a$,....; car, outre qu'il serait facile

d'en déduire Fx, ainsi que nous le verrons tout-à-l'heure, la décomposition de la première fraction du second membre se trouverait ainsi exécutée.

Si, dans notre équation, on chasse les dénominateurs ; et, qu'après avoir changé x en $a+y$, on développe par la *série de Taylor*, il viendra

$$\psi a+\frac{y}{1}\psi' a+\frac{y^2}{1.2}\psi'' a+\ldots\ldots=$$

$$Fa+\frac{y}{1}F'a+\frac{y^2}{1.2}F''a+\ldots\}\{fa+\frac{y}{1}f'a+\frac{y^2}{1.2}f''a+\ldots\}$$

$$+y^m\{\Phi a+\frac{y}{1}\Phi' a+\frac{y^2}{1.2}\Phi'' a+\ldots\ldots\}$$

d'où, en comparant les puissances semblables de y

$$\psi a=faFa,$$

$$\psi' a=faF'a+f'aFa,$$

$$\psi'' a=faF''a+2f'aF'a+f''aFa;$$

et, en général

$$\psi^{(n)}a=faF^{(n)}a+\frac{n}{1}f'aF^{(n-1)}a+\frac{n}{1}\frac{n-1}{2}f''aF^{(n-2)}a+\ldots\ldots,$$

pourvu que n soit moindre que m. Or, comme ψx et fx sont connus, on aura facilement ψa, $\psi' a$, ψ'', ..., fa, $f'a$, $f''a$, ...; on n'aura donc d'inconnues, dans les équations ci-dessus, que Fa, $F'a$, $F''a$, ..., qu'elles serviront à déterminer. Il viendra alors

$$Fx=F\{a+(x-a)\}=Fa+\frac{x-a}{1}F'a+\frac{(x-a)^2}{1.2}F''a+\ldots\ldots;$$

et ensuite

$$\Phi x=\frac{\psi x-fxFx}{(x-a)^m}.$$

Soit

Soit proposée, pour exemple, la fraction

$$\frac{9x^6-94x^5+383x^4-787x^3+891x^2-576x+192}{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x-4)};$$

Nous aurons ici

$$\psi x=9x^6-94x^5+383x^4-787x^3+891x^2-576x+192\ ;$$
$$\varphi x=(x-1)^3(x-2)^2(x-3)(x-4)\ ,$$
$$a=1$$
$$fx=(x-1)^2(x-3)(x-4)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48\ ;$$

donc

$$\psi' x=54x^5-470x^4+1532x^3-2361x^2+1782x-576\ ;$$
$$\psi'' x=270x^4-1880x^3+4596x^2-4722x+1782\ ,$$
$$f'x=4x^3-33x^2+88x-76\ ,$$
$$f''x=12x^2-66x+88\ ,$$

et par conséquent

$$\psi a=18\ ,\quad \psi' a=-39\ ,\quad \psi'' a=46\ ,$$
$$fa=6\ ,\quad f'a=-17\ ,\quad f''a=34\ ;$$

donc

$$18=6\mathrm{F}a\ ,$$
$$-39=6\mathrm{F}'a-17\mathrm{F}a\ ,$$
$$46=6\mathrm{F}''a-34\mathrm{F}'a+34\mathrm{F}a\ ;$$

et de là

$$\mathrm{F}a=3\ ,\quad \mathrm{F}'a=2\ ,\quad \mathrm{F}''a=2.$$

Donc

$$\mathrm{F}x=3+2(x-1)+(x-1)^2=x^2+2\ ;$$
$$fx\mathrm{F}x=x^6-11x^5+46x^4-98x^3+136x^2-152x+96\ ,$$
$$\psi x-fx\mathrm{F}x=8x^6-83x^5+337x^4-689x^3+755x^2-424x+96\ ,$$

$$\Phi x=\frac{\psi x-fxFx}{(x-a)^m}=8x^3-59x^2+136x-96\ ;$$

donc enfin

$$\frac{\psi x}{\varphi x}=\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{8x^3-59x^2+136x-96}{(x-2)^2(x-3)(x-4)}.$$

On décomposera la dernière fraction, en lui appliquant le même procédé.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Démonstration analitique des théorèmes qui servent de fondement à la doctrine des Centres des moyennes distances ;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.

§. I.

Soient des points, en nombre quelconque, situés d'une manière quelconque dans l'espace, et dont les masses soient respectivement m', m'', m''',.....; supposons-les invariablement liés entre eux ; rapportons-les à trois plans coordonnés ; et soient alors leurs coordonnées respectives x', y', z' ; x'', y'', z''; x''', y''', z''';...

Soit prise une nouvelle origine dont les coordonnées soient x, y, z : en conservant d'ailleurs la direction des plans coordonnés primitifs. Les nouvelles coordonnées des points du système seront respectivement $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$; $x''-x$, $y''-y$, $z''-z$; $x'''-x$, $y'''-y$, $z'''-z$;.....

Supposons que les coordonnées x, y, z, de la nouvelle origine soient indéterminées, et cherchons à les déterminer de manière que les sommes des produits respectifs des masses du système par leurs

distances à chacun des nouveaux plans coordonnés soient séparément nulles ; ces conditions fourniront les trois équations

$$m'(x'-x)+m''(x''-x)+m'''(x'''-x)+\ldots\ldots=0\ ,$$
$$m'(y'-y)+m''(y''-y)+m'''(y'''-y)+\ldots\ldots=0\ ,$$
$$m'(z'-z)+m''(z''-z)+m'''(z'''-z)+\ldots\ldots=0\ ;$$

en transposant et faisant, en général, pour abréger, $k'+k''+k'''+\ldots\ldots=\Sigma(k')$, ces équations deviendront

$$\Sigma(m'x')=x\Sigma(m')\ ,\quad \Sigma(m'y')=y\Sigma(m')\ ,\quad \Sigma(m'z')=z\Sigma(m')\ ; \quad (1)$$

équations qui déterminent x, y, z.

Ainsi, la nouvelle nouvelle origine, qui se trouve absolument déterminée par ces conditions, jouit de cette propriété que la somme des produits respectifs des masses du système par leurs distances à chacun des plans coordonnés primitifs, est égale au produit de la somme de ces masses par la distance de cette nouvelle origine au même plan.

Et, comme les plans coordonnés primitifs sont quelconques, par rapport au système, on peut établir la proposition suivante :

Dans tout système de points matériels, il y a toujours un point, différent, en général, des points du système, dont la propriété caractéristique consiste en ce que le produit de la somme des masses du système par la distance de ce point à un plan quelconque, est égal à la somme des produits de ces masses par leurs distances respectives à ce même plan. Et, si un point jouit de cette propriété, par rapport à trois plans déterminés, non parallèles, il en jouira par rapport à tout autre plan quelconque, et sera conséquemment le point dont il s'agit ici.

Ce point est ce qu'on appelle, en mécanique, le *Centre d'inertie* du système.

Si l'on suppose présentement que les masses m', m'', m''', ...

sont toutes égales entre elles, et que leur nombre est n ; les équations (1) prendront la forme

$$\Sigma(x')=nx\ ,\quad \Sigma(y')=ny\ ,\quad \Sigma(z')=nz\ ;\qquad (2)$$

et la nouvelle origine deviendra ce qu'on appelle, en géométrie, le *Centre des moyennes distances*. De là, en raisonnant comme ci-dessus, on conclura le théorème suivant :

THÉORÈME I. Dans tout système de points mathématiques, il y a toujours un centre des moyennes distances *dont la propriété caractéristique consiste en ce que sa distance à un plan quelconque est égale à la somme des distances des points du système au même plan, divisée par le nombre de ces points. Et si un point jouit de cette propriété relativement à trois plans déterminés, non parallèles, il en jouira également par rapport à tout autre plan quelconque, et sera conséquemment le centre des moyennes distances du système.* (*)

Nous ne nous arrêterons pas à faire remarquer les modifications dont ces propositions sont susceptibles, lorsque tous les points matériels ou mathématiques du système sont sompris dans un même plan, ou situés sur une même droite; parce que cela ne présente aucune difficulté.

Tout ce qui précède ne supposant nullement que le système primitif soit rectangulaire ; il en résulte qu'aux distances perpendiculaires on peut substituer des distances mesurées parallèlement à une droite quelconque, donnée de direction.

Il est entendu que, dans tout ceci, les distances mesurées de différens côtés d'un même plan ou d'une même droite doivent être prises avec des signes contraires.

§. II.

Retournons à notre système de points matériels m', m'', m''', ...;

(*) Voyez la *Géométrie de position*, page 315.

supposons que les plans coordonnés primitifs soient rectangulaires, et que le centre d'inertie soit pris pour origine. Les équations (1) deviendront alors

$$\Sigma(m'x')=0\ ,\quad \Sigma(m'y')=0\ ,\quad \Sigma(m'z')=0. \qquad (3)$$

Soit un point quelconque m, ayant pour ses coordonnées x, y, z; soient r, r', r'', r''',.... les distances respectives des points m, m', m'', m''',.... à l'origine; soient, en outre, a', a'', a''',.... les distances respectives du point m aux points m', m'', m''',....; nous aurons d'abord

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=r^2\ , \\ x'^2+y'^2+z'^2=r'^2\ , \\ x''^2+y''^2+z''^2=r''^2\ , \\ x'''^2+y'''^2+z'''^2=r'''^2\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (4)$$

et ensuite

$$\left.\begin{array}{l} (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2=a'^2\ , \\ (x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2=a''^2\ , \\ (x-x''')^2+(y-y''')^2+(z-z''')^2=a'''^2\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (5)$$

En prenant la somme des produits respectifs des développemens de ces dernières équations par m', m'', m''',...., et ayant égard aux équations (3) et (4), on obtiendra

$$r^2\Sigma(m')+\Sigma(m'r'^2)=\Sigma(m'a'^2). \qquad (6)$$

Ainsi une sphère ayant pour centre le centre d'inertie d'un système de points matériels, la somme des produits des masses de ce système par les quarrés de leurs distances respectives à un point quelconque

de la surface de la sphère est égale à la somme des produits respectifs des mêmes masses par les quarrés de leurs distances au centre de cette sphère, augmentée du produit de la somme des masses du système par le quarré du rayon de la sphère.

Si l'on suppose encore ici que les masses m', m'', m''',..... deviennent égales ; auquel cas le centre de la sphère deviendra le centre des moyennes distances du système ; et qu'on représente toujours par n le nombre des points de ce système ; l'équation (6) prendra la forme que voici :

$$nr^2+\Sigma(r'^2)=\Sigma(a'^2) ;$$

ce qui donne lieu au théorème suivant :

THÉORÈME II. Une sphère ayant pour centre le centre des moyennes distances d'un système de points mathématiques ; la somme des quarrés des distances des points du système à un point quelconque de la surface de la sphère, est égale à la somme des quarrés des distances des mêmes points à son centre, augmentée d'autant de fois le quarré du rayon de la sphère qu'il y a de points dans le système. (*)

Lorsque les points matériels ou mathématiques du système sont tous compris dans un même plan, ou situés sur une même ligne droite ; ces propositions sont susceptibles de modifications faciles à découvrir, et sur lesquelles conséquemment nous croyons superflu d'insister.

Nous renvoyons, pour les nombreuses conséquences qui peuvent être déduites des deux théorèmes que nous venons de démontrer, à la *Géométrie de position* de M. Carnot.

(*) Voyez la *Géométrie de position*, page 317.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Serres, professeur de mathématiques à l'école de Sorèze,

Au Rédacteur des *Annales*;



Monsieur,

J'ai lu, avec intérêt, dans le numéro du mois d'août dernier de vos *Annales*, page 41, le mémoire de M. de Maizière, sur les limites des racines des équations; et j'ai eu lieu, plus d'une fois, d'admirer la sagacité de son auteur. Mais j'ai été étrangement surpris, lorsque, tombant par hasard sur une équation particulière, $x^3-12x^2+44x-48=0$, dont les racines sont 2, 4, 6, j'ai cependant trouvé 5 pour limite, en vertu de la 3.e observation, qui m'a suggéré l'idée de mettre l'équation sous la forme $x(x^2-12x+44)-48=0$. Le facteur trinome étant essentiellement positif; j'ai dû en conclure que je pouvais regarder les trois premiers termes comme positifs, et prendre pour limite $1+\sqrt[3]{48}<1+4=5$. Cette conclusion ne pouvant s'accorder avec la racine 6, j'ai pensé qu'il devait y avoir quelque vice dans cette troisième observation; et voici à quel résultat mes réflexions sur ce sujet m'ont conduit.

Il ne saurait être permis de dénaturer le 1.er terme de l'équation, pour le grouper avec les deux suivans, à moins que toute l'équation ne puisse se décomposer en plusieurs groupes positifs, comme au n.° 6 des observations. En effet, la démonstration générale, qui donne la limite $1+\sqrt[k]{P_k}$, porte essentiellement sur ce que le 1.er terme seul x^m, en vertu de cette limite, est rendu plus grand que

tous les termes négatifs ensemble ; il faut donc que ce 1.er terme reste isolé, pour remplir cette condition ; et on ne peut grouper que les termes suivans, pour en faire un ou plusieurs polynômes positifs, de manière à reculer le terme négatif, dont le rang doit déterminer le degré de la racine à extraire du plus grand coefficient négatif qui vient à la suite de ces différens groupes.

Si l'on veut faire entrer le premier terme dans ces transformations; il me paraît qu'alors il est nécessaire de vérifier la limite à laquelle on parvient; en examinant si le groupe, plus la somme des termes positifs qui pourront le suivre immédiatement, donnent un nombre plus grand que la somme des termes négatifs suivans: afin qu'au de là de cette limite, le résultat général demeure toujours positif. Par exemple, dans notre équation ci-dessus, après avoir trouvé 5 pour limite, il faudrait s'assurer si cette limite donne $x(x^2-12x+44)>48$, ce qui n'est pas ; la limite 5 est donc trop faible, et doit conséquemment être rejetée.

Si vous pensez, Monsieur, que ces observations soient fondées, et qu'elles puissent être utiles à vos lecteurs, vous voudrez bien, je pense, leur accorder une place dans votre estimable journal.

Agréez, etc.

Sorèze, le 13 décembre 1812.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

I. Construire le plus petit système de trois cercles se touchant deux à deux, dont les circonférences passent respectivement par les trois sommets d'un triangle donné?

II. Construire le plus grand de tous les triangles qui ont respectivement leurs sommets sur les circonférences de trois cercles qui se touchent deux à deux?

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Théorie analitique des pôles *des lignes et des surfaces du second ordre;*

Par M. GERGONNE.



CEUX-LA même qui sont le plus portés à reconnaître les avantages que présente la *Géométrie analitique* proprement dite, sous le rapport de l'uniformité de ses procédés, tout en convenant qu'elle seule jouit du privilége de nous conduire constamment au terme de nos recherches, sans aucune sorte de tâtonnement, lui reprochent assez généralement de ne fournir, pour la résolution des problèmes, que des constructions très-compliquées, et de ne démontrer les théorèmes que par des calculs dont la prolixité est quelquefois rebutante.

J'ai toujours pensé que, le plus souvent, ces inconvéniens tenaient peut-être beaucoup moins à la nature même de l'instrument qu'à la manière dont on l'emploie; et que, lorsqu'on aurait manié les formules de la géométrie analitique pendant autant de temps qu'il y en a que l'on contemple des cercles et des triangles, cette branche des sciences exactes aurait, sur la géométrie pure, relativement à la construction des problèmes et à la démonstration des théorèmes, cette même supériorité que personne ne lui conteste à tant d'autres égards.

J'ai déjà prouvé ailleurs, par quelques exemples (*), que la géométrie analitique, convenablement employée, pouvait fournir, pour la résolution des problèmes, des constructions qui ne le cèdent en rien, pour l'élégance et la simplicité, à celles qu'on déduit des

(*) Voyez la *Notice des travaux de l'académie du Gard, pour* 1810.

considérations purement géométriques. Je me propose ici d'appliquer le même moyen de recherche à la démonstration d'une propriété très-importante des lignes et surfaces du second ordre, propriété remarquée, je crois, pour la première fois par M. Monge, et de laquelle je ne connais qu'une démonstration analitique (*), compliquée et incomplette, relative seulement aux lignes du second ordre. La suivante, dont je fais, depuis long-temps, usage dans mes cours, me paraît d'une extrême simplicité.

§. I.

Une ligne (L) du second ordre étant tracée sur un plan, on peut toujours déterminer, sur ce plan, une infinité de systèmes d'axes, soit rectangulaires soit obliques, tels que, la courbe y étant rapportée, son équation prenne la forme

$$ax^2+by^2+dx+ey=0. \qquad (L) \qquad (**)$$

Si, par un point (x', y'), pris sur la courbe, on lui mène une tangente (T), l'équation de cette tangente se présentera d'abord sous la forme

$$(2ax'+d)(x-x')+(2by'+e)(y-y')=0 \; ,$$

et pourra ensuite être écrite ainsi

$$(2ax'+d)x+(2by'+e)y=2ax'^2+2by'^2+dx'+ey' \; ;$$

mais, parce que le point (x', y') est sur la courbe, on doit avoir

$$ax'^2+by'^2+dx'+ey'=0 \; ; \qquad (L')$$

en ajoutant le double de cette dernière à la précédente, et réduisant,

(*) Voyez le *Recueil de diverses propositions de géométrie* de M. Puissant, première édition, page 56; deuxième édition, pages 138 et 415.

(**) J'aurais pu, sans rien faire perdre à cette équation de sa généralité, la dépouiller de l'un ou de l'autre de ses deux derniers termes; mais, en les conservant tous deux, je parviens à des résultats plus symétriques, sans compliquer sensiblement les calculs. C'est, de plus, pour conserver l'analogie entre ce paragraphe et le suivant, que j'ai omis le coefficient c.

l'équation de la tangente (T) au point (x', y') de la ligne (L) prend cette forme très-simple

$$(2ax'+d)x+(2by'+e)y+dx'+ey'=0. \qquad (T)$$

Supposons, en second lieu, que l'on propose de mener à la courbe une tangente, par un point extérieur (p), ayant α et β pour ses coordonnées; la question se réduira à déterminer le point de contact, ou plutôt les coordonnées de ce point. Si l'on désigne par x' et y' ces coordonnées, l'équation de la tangente sera, comme ci-dessus, l'équation (T), avec cette différence que x' et y' s'y trouvaient connues et qu'ici il faut les déterminer; or, elles se trouvent d'abord liées par l'équation (L'); de plus, le point (p) étant sur (T), on doit avoir

$$(2ax'+d)\alpha+(2by'+e)\beta+dx'+ey'=0,$$

ou

$$(2a\alpha+d)x'+(2b\beta+e)y'+d\alpha+e\beta=0; \qquad (q')$$

on aura donc les coordonnées du point de contact, en combinant cette dernière équation avec l'équation (L') ou, ce qui revient au même, en combinant avec l'équation (L) l'équation

$$(2a\alpha+d)x+(2b\beta+e)y+d\alpha+e\beta=0. \qquad (q)$$

Mais, au lieu de combiner entre elles les équations (L) et (q), on peut construire leurs lieux géométriques, qui détermineront, par leur intersection, le point de contact cherché; or, de ces deux lieux, le premier (L) se trouve tout construit, puisque c'est la courbe donnée elle-même; et, comme l'autre (q) est celui d'une ligne droite, il s'ensuit que c'est l'équation de la droite qui joint les points de contact qui, en effet, doivent être au nombre de deux, puisque leur détermination dépend de la combinaison d'une équation (L) du second degré avec une équation (q) du premier.

Ainsi, le sommet (p) d'un angle circonscrit à une ligne (L) du second ordre étant donné, rien n'est plus facile que de déterminer la droite (q) qui joint les deux points où les côtés de cet angle touchent la courbe. Le problème inverse, c'est-à-dire, celui où l'on

proposerait de déterminer le sommet (p) de l'angle circonscrit, par la connaissance de la droite (q) qui passe par les points de contact, n'offrirait guère plus de difficulté; il ne s'agirait, en effet, pour le résoudre, que de considérer les coordonnées α, β du point (p) comme inconnues, dans l'équation (q), et de les déterminer en exprimant que cette équation est identique avec celle de la droite donnée. (*)

Supposons présentement que le point (p) soit variable, alors la droite (q) le sera aussi; assujettissons-là néanmoins, dans ses variations, à passer constamment par un certain point (P), ayant g et h pour ses coordonnées; nous exprimerons cette circonstance par l'équation unique

$$(2a\alpha+d)g+(2b\beta+e)h+d\alpha+e\beta=0 ,$$

ou

$$(2ag+d)\alpha+(2bh+e)\beta+dg+eh=0 ;$$

cette équation exprimant une relation constante entre les coordonnées α et β du point (p), en y changeant ces coordonnées en x et y, elle deviendra celle du lieu (Q) de tous les points (p) qui répondent aux diverses situations que peut prendre la droite (q) autour du point (P); l'équation de ce lieu (Q) sera donc

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+dg+eh=0 ; \qquad (Q)$$

équation d'une ligne droite.

De là résulte ce théorème :

(*) Il est remarquable que, quand bien même le point (p) serait situé du côté de la concavité de la courbe, la droite (q) n'en existerait pas moins; et que, réciproquement, quand bien même la droite (q) ne couperait pas la courbe, le point (p) n'en aurait pas moins une existence effective; mais ce point et cette droite cesseraient alors de répondre à l'idée que nous en donnons ici. Il n'est aucun point, sur le plan d'une ligne du second ordre, auquel il ne réponde une pareille droite, ni aucune droite, sur le même plan, à laquelle il ne réponde un pareil point. On va voir, tout à l'heure, quelle est la relation remarquable qui les lie les uns aux autres.

THÉORÈME. Si, par un point pris arbitrairement sur le plan d'une ligne du second ordre, on mène à cette courbe une suite de sécantes; et que, par les deux points d'intersection de chacune d'elles avec la courbe, on mène à cette même courbe deux tangentes, terminées à leur point de concours, les tangentes de mêmes couples formeront une suite d'angles circonscrits dont les sommets seront tous sur une même ligne droite.

De même que, le point (P) étant donné arbitrairement, on peut toujours déterminer une droite (Q) qui ait avec lui la relation exprimée par ce théorème; on peut réciproquement, lorsque c'est la droite (Q) qui est donnée, déterminer un point (P) qui soit lié avec elle par une semblable relation; il ne s'agit, en effet, pour cela, que de considérer comme inconnues, dans l'équation de la droite (Q), les coordonnées g et h du point (P), et de les déterminer en exprimant que cette équation est identique avec celle de la droite donnée.

De là résulte le théorème suivant, inverse du premier:

THÉORÈME. Si l'on circonscrit à une ligne du second ordre une suite d'angles dont les sommets soient tous sur une même droite, située comme on le voudra sur le plan de la courbe; les sécantes menées à la courbe, par les points de contact des côtés de ces angles avec elle, concourront toutes en un même point. (*)

A cause de la relation qui existe entre le point (P) et la droite (Q), ce point a été appelé le *Pôle* de cette droite; et on peut, à l'inverse, appeler la doite (Q) la *Polaire* du point (P). (**)

(*) On remarquera aisément qu'il y a entre le point (P) et la droite (Q) une relation semblable à celle qui existe entre le point (p) et la droite (q).

(**) On sait qu'on peut construire la polaire lorsque le pôle est connu, ou le pôle lorsque la polaire est connue, en n'employant que la *règle seulement*. (Voyez le tome 1.er des *Annales*, page 337).

§. II.

Une surface (S) du second ordre étant donnée, on peut toujours déterminer une infinité de systèmes d'axes, soit rectangulaires soit obliques, tels que, la surface y étant rapportée, son équation prenne la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz=0. \quad (S) \qquad (*)$$

Si, par un point (x', y', z'), pris sur cette surface, on lui mène un plan tangent (T), l'équation de ce plan se présentera d'abord sous la forme

$$(2ax'+d)(x-x')+(2by'+e)(y-y')+(2cz'+f)(z-z')=0,$$

et pourra ensuite être écrite ainsi

$$(2ax'+d)x+(2by'+e)y+(2cz'+f)z=2ax'^2+2by'^2+2cz'^2+dx'+ey'+fz'=0;$$

mais, parce que le point (x', y', z') est sur (S), on doit avoir

$$ax'^2+by'^2+cz'^2+dx'+ey'+fz'=0; \qquad (S')$$

en ajoutant le double de cette dernière à la précédente, et réduisant, l'équation du plan tangent (T) au point (x', y', z') de la surface (S) prend cette forme très-simple

$$(2ax'+d)x+(2by'+e)y+(2cz'+f)z+dx'+ey'+fz'=0. \qquad (T)$$

Supposons, en second lieu, que l'on propose de mener à la surface un plan tangent, par un point extérieur (p), ayant α, β et γ pour ses coordonnées; en désignant par x', y', z' les coordonnées du point de contact, l'équation (T) sera encore celle du plan cherché; mais avec cette différence que x', y', z' qui, tout à l'heure, étaient connues, seront ici inconnues; or, elles se trouvent d'abord

(*) Je conserve ici les trois termes en x en y et en z, pour les mêmes raisons qui m'ont fait conserver les deux termes en x et en y dans le § précédent.

liées par l'équation (S′); de plus, le point (p) étant sur (T), on doit avoir

$$(2ax'+d)\alpha+(2by'+e)\beta+(2cz'+f)\gamma+dx'+ey'+fz'=0\ ,$$

ou

$$(2a\alpha+d)x'+(2b\beta+e)y'+(2c\gamma+f)z'+d\alpha+e\beta+f\gamma=0\ ; \qquad (q')$$

on n'aura donc, entre les trois coordonnées du point de contact, que les deux équations (S′) et (q') seulement; équations auxquelles on pourra, au surplus, substituer l'équation (S) avec l'équation

$$(2a\alpha+d)x+(2b\beta+e)y+(2c\gamma+f)z+d\alpha+e\beta+f\gamma=0\ ; \quad (q)$$

ce point demeurera donc indéterminé; c'est-à-dire, qu'il y aura une infinité de points de contact, et conséquemment une infinité de plans tangens; ce qui est d'ailleurs évident.

Tous ces points de contact seront donc donnés par l'ensemble des équations (S) et (q); or, la première étant celle même de la surface proposée; puisque la seconde est celle d'un plan, il s'ensuit que ce plan coupe cette surface suivant tous les points de contact.

Concevons présentement une surface conique circonscrite à (S) et ayant le point (p) pour centre ou sommet; tous les plans tangens à (S), conduits par (p), seront aussi tangens à cette surface conique; les points de contact de la surface conique avec (S) seront donc les mêmes que ceux de (S) avec les plans tangens conduits par (p); ces points seront donc aussi déterminés par l'intersection de la surface (S) avec le plan (q).

Nous voilà donc parvenus à cette proposition remarquable: *Lorsqu'une surface conique est circonscrite à une surface du second ordre, la ligne de contact de ces deux surfaces est une courbe plane.*

Il n'est pas difficile de voir que, réciproquement, tout plan coupant une surface du second ordre détermine sur elle la ligne de contact de cette surface avec une certaine surface conique circonscrite. On voit même que, pour déterminer le centre ou sommet de cette surface conique, il ne s'agit que d'exprimer que le plan

dont il s'agit est identique avec le plan (q); ce qui déterminera les trois coordonnées α, β, γ de ce centre. (*)

Supposons présentement que le point (p) soit variable, alors le plan (q) le sera aussi; assujettissons-le néanmoins, dans ses variations, à passer constamment par un certain point (P), ayant g, h et k pour ses coordonnées; nous exprimerons cette circonstance par l'équation unique

$$(2a\alpha+d)g+(2b\beta+e)h+(2c\gamma+f)k+d\alpha+e\beta+f\gamma=0\ ,$$

ou

$$(2ag+d)\alpha+(2bh+e)\beta+(2ck+f)\gamma+dg+eh+fk=0\ ;$$

cette équation exprimant une relation constante entre les coordonnées α, β et γ du point (p); en y changeant ces coordonnées en x, y et z, elle deviendra celle du lieu (Q) de tous les points (p) qui répondent aux diverses situations que peut prendre le plan (q) autour du point (P); l'équation de ce lieu (Q) sera donc

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+(2ck+f)z+dg+eh+fk=0\ , \qquad \text{(Q)}$$

équation d'un plan.

De là résulte le théorème suivant:

THÉORÈME: Si, par un point pris arbitrairement dans l'espace, on conduit à une surface du second ordre une suite de plans sécants; et que l'on considère leurs intersections avec cette surface comme les lignes de contact d'une suite de surfaces coniques circonscrites; les centres ou sommets de ces surfaces coniques se trouveront tous situés sur un même plan.

Si, au lieu d'assujettir le plan (q) à passer seulement par un point (P), on l'assujettissait à passer par une certaine droite (M); en désignant par (P) et (P′) deux points de cette droite, et supposant que leurs coordonnées sont g et g', h et h', k et k'; le

(*) On peut faire ici des remarques analogues à celles qui ont été faites dans la note de la page 296.

point

point (p) se trouveraient assujetti à être à la fois sur le plan (Q) et sur un autre plan dont on obtiendrait l'équation en changeant, dans celle de (Q), g, h, k en g', h', k'; ce point (p) se trouverait donc dans l'intersection de deux plans (Q) et (Q'), c'est-à-dire, qu'il se trouverait sur une ligne droite (N).

De même que, le point (P) étant pris arbitrairement, on peut toujours assigner un plan (Q) qui ait avec lui la relation énoncée dans le théorème auquel nous venons de parvenir, il n'est réciproquement aucun plan (Q), dans l'espace, auquel il ne réponde un certain point (P) lié avec lui par une semblable relation; on voit même que, pour obtenir ce point, il ne s'agit que de considérer comme inconnues, dans l'équation du plan (Q), les coordonnées g, h et k du point (P), et de les déterminer en exprimant que cette équation est identique avec celle du plan donné.

De là résulte le théorème suivant, inverse du premier :

THÉORÈME. Si l'on circonscrit à une surface du second ordre une suite de surfaces coniques, dont les centres ou sommets soient tous sur un même plan, situé d'une manière quelconque dans l'espace, les plans des lignes de contact de ces surfaces coniques avec la surface proposée passeront tous par un même point. (*)

A cause de la relation qui existe entre le point (P) et le plan (Q), ce point a été appelé le *Pôle* de ce plan; et l'on peut, à l'inverse, appeler le plan (Q) le *Plan polaire* du point (P).

Il est aisé de voir que, si les sommets des surfaces coniques circonscrites étaient assujettis à être situés sur une même droite, ils se trouveraient, par là même, assujettis à être, à la fois, sur deux plans menés arbitrairement par cette droite; qu'ainsi les plans des lignes de contact se trouveraient assujettis à passer tous par deux points fixes, c'est-à-dire, par un droite joignant ces deux points.

(*) On peut faire ici des remarques analogues à celles qui ont été faites dans la note de la page 297.

La droite (M) qui doit contenir les centres ou sommets de toutes les surfaces coniques circonscrites étant donnée, en exprimant qu'elle est identique avec celle qui est donnée par les deux plans (Q) et (Q′) on obtiendra quatre équations de relation entre les six coordonnées g, g', h, h', k, k'; prenant donc les deux dernières arbitrairement, elles se trouveront toutes déterminées, et l'on aura ainsi deux points de la droite (N) par laquelle passent les plans de toutes les lignes de contact.

A cause de la dépendance réciproque entre la droite (N), par laquelle passe le plan mobile, et celle (M) que décrit le sommet de la surface conique, on peut appeler la première, la polaire de l'autre.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

Démonstration de quelques propriétés des pôles des lignes et surfaces du second ordre;

Par M. Rochat, professeur de navigation à St-Brieux.



§. I.

On sait qu'une ligne du second ordre (L) étant donnée; si on la rapporte à deux axes respectivement parallèles à deux diamètres conjugués, son équation prend la forme

$$ax^2+by^2+dx+ey=0\,; \qquad \text{(L)}$$

on sait, de plus, qu'en prenant un pôle (P) dont les coordonnées soient g et h, la polaire (Q), correspondant à ce pôle, a pour équation

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+dg+eh=0. \qquad (*) \qquad \text{(Q)}$$

Si, dans les équations (L) et (Q), on suppose $e=0$, elles deviendront

$$ax^2+by^2+dx=0\,, \qquad (2ag+d)x+2bhy+dg=0\,;$$

l'axe des x sera alors un diamètre de la courbe, et l'axe des y sera une parallèle quelconque à son conjugué.

Les choses étant ainsi, si l'on veut que la droite (Q) soit parallèle à l'axe des y, il faudra que le terme en y disparaisse de son équation; on devra donc avoir $h=0$; et réciproquement, toutes les fois que h sera nul, quel que soit d'ailleurs g, la droite (Q) deviendra parallèle à l'axe des y. De là résulte le théorème suivant;

THÉORÈME. Toute droite située sur le plan d'une ligne du second ordre, a son pôle situé sur le conjugué du diamètre auquel cette droite est parallèle; et réciproquement.

Donc, *si une droite se meut parallèlement à elle-même, sur le plan d'une ligne du second ordre, son pôle sera mû suivant le conjugué du diamètre auquel elle demeurera constamment parallèle; et réciproquement.*

(*) Voyez le précédent mémoire. On a cru devoir adopter les mêmes notations, dans l'un et dans l'autre, afin d'en rendre le rapprochement plus facile.

J. D. G.

Dans le cas particulier où la courbe est une parabole, la supposition $e=0$ entraîne $a=0$; en supposant donc toujours $h=0$, l'équation de (Q) se réduit à $x=-g$; ce qui prouve que, *dans la parabole la portion du diamètre comprise entre la droite et son pôle est coupée en deux parties égales par la courbe.*

Du théorème qui vient d'être démontré, on peut conclure le suivant :

THÉORÈME. Le point de concours de deux tangentes quelconques à une ligne du second ordre est sur le conjugué du diamètre auquel la droite qui joint les points de contact de ces deux tangentes est parallèle.

Il suit évidemment de la nature des pôles des lignes du second ordre que, si deux droites, tracées sur le plan d'une pareille ligne, sont telles que la seconde passe par le pôle de la première, la première passera réciproquement par le pôle de la seconde. Si donc la seconde tourne autour du pôle de la première, son pôle sera mû suivant cette première. De là résulte encore cet autre théorème :

THÉORÈME. Si une droite, tracée sur le plan d'une ligne du second ordre, se meut autour d'un point fixe, pris comme on voudra, sur sa direction, son pôle sera mû suivant une parallèle au conjugué du diamètre mené à la courbe par ce point fixe; et réciproquement.

§. II.

On sait qu'une surface (S) du second ordre étant donnée; si on la rapporte à trois axes respectivement parallèles à trois diamètres conjugués, son équation prendra la forme

$$ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz=0\,; \qquad (S)$$

on sait, de plus, qu'en prenant un pôle (P) dont les coordonnées

soient g, h, k, le plan polaire (Q), correspondant à ce pôle, a pour équation

$$(2ag+d)x+(2bh+e)y+(2ck+f)z+dg+eh+fk=0\ ; \quad (*) \quad (Q)$$

Si l'on suppose d et e égaux à zéro, les équations (S) et (Q) deviendront

$$ax^2+by^2+cz^2+fz=0\ ; \qquad 2agx+2bhy+(2ck+f)z+fk=0.$$

Les deux diamètres auxquels les axes des x et des y seront alors parallèles, auront pour leur conjugué l'axe des z.

Les choses étant dans cet état, si l'on veut que le plan (Q) soit parallèle à celui des xy, il faudra que les termes en x et en y disparaissent de son équation ; on devra donc avoir $g=0$, $h=0$; réciproquement toutes les fois que g et h seront nuls, quel que soit d'ailleurs k, le plan (Q) deviendra parallèle au plan des xy. De là résulte le théorème suivant :

THÉORÈME. Lorsque trois diamètres d'une surface du second ordre sont conjugués, tout plan parallèle à celui de deux de ces diamètres a son pôle sur le troisième ; et réciproquement.

Donc, *si un plan se meut parallèlement à lui-même, son pôle sera mû suivant le diamètre qui joint les points de contact des deux plans tangens parallèles à la direction constante de celui-là.*

Dans le cas particulier où la surface est un paraboloïde, la supposition $d=0$, $e=0$ entraîne $c=0$; en supposant donc toujours $g=0$, $h=0$, l'équation de (Q) se réduit à $z=-f$; ce qui prouve que, *dans le paraboloïde, la portion du diamètre comprise entre le plan et son pôle est coupée en deux parties égales par cette surface.*

(*) Voyez le précédent mémoire.

J. D. G.

Du théorème qui vient d'être démontré on peut conclure le suivant.

THÉORÈME. Le sommet de la surface conique circonscrite à une surface du second ordre est sur un diamètre tel que les plans tangens à ses extrémités sont parallèles au plan de la ligne de contact.

Il suit évidemment de la nature des pôles des surfaces du second ordre que, si deux plans sont tels que le second passe par le pôle du premier, le premier passera réciproquement par le pôle du second; si donc le second tourne autour du pôle du premier, son pôle sera continuellement dans ce premier plan. De là résulte encore cet autre théorème :

THÉORÈME. Un plan tournant autour d'un point fixe, situé d'une manière quelconque par rapport à une surface du second ordre, son pôle ne sort pas d'un plan parallèle aux plans qui toucheraient cette surface aux deux extrémités du diamètre mené par ce point fixe; et réciproquement.

On voit, d'après cela, que, si un plan tourne à la fois autour de deux points fixes, auquel cas il tournera autour d'une droite fixe passant par ces deux points; son pôle ne sortira pas de deux plans fixes, et décrira conséquemment la droite qui est l'intersection de ces deux plans. Cette droite sera parallèle à l'intersection des plans tangens aux points de la surface courbe où elle est rencontrée par les diamètres qui passent par les deux points fixes. Nous appellerons la droite décrite par le pôle, dans ce cas, la *polaire* de celle autour de laquelle tourne le plan auquel ce pôle appartient.

Examinons présentement les diverses directions que prend cette polaire suivant les diverses situations de la droite à laquelle elle correspond. Supposons que le plan (Q) soit assujetti à passer constamment par une droite (M), ayant pour ses deux équations

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda\ , \qquad \alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\lambda'\ ; \qquad \text{(M)}$$

on exprimera cette circonstance en exprimant que l'élimination de x et y, entre ces deux équations et celle de (Q), conduit à une équation qui laisse z indéterminée; cette équation en z est

$$\{(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(2ag+d)+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(2bh+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(2ck+f)\}z$$
$$+(\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ag+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2bh+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dg+eh+fk)=0;$$

égalant donc à zéro le coefficient de z et le terme tout connu, en changeant g, h, k en x, y, z, les équations de la polaire (N) de (M) seront

$$\left.\begin{array}{l}(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(2ax+d)+(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(2cz+f)=0,\\(\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ax+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dx+ey+fz)=0.\end{array}\right\}(\text{N})$$

Si l'axe des z est un diamètre, et que (M) soit parallèle au plan des xy, on aura $d=0$, $e=0$, $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$; les équation de (N) deviendront donc

$$a(\beta\gamma'-\beta'\gamma)x+b(\gamma\alpha'-\gamma'\alpha)y=0, \quad a(\beta'\lambda-\beta\lambda')x+b(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)y=0;$$

d'où l'on voit que cette droite (N) passera alors par l'axe des z.

Si le plan des xy est un plan diamètre et que (M) soit parallèle à l'axe des z, on aura $f=0$, $\beta\gamma'-\beta'\gamma=0$, $\gamma\alpha'-\gamma'\alpha=0$; les équations de (N) deviendront donc

$$z=0, \quad (\beta'\lambda-\beta\lambda')(2ax+d)+(\alpha\lambda'-\alpha'\lambda)(2by+e)+(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(dx+ey)=0,$$

d'où l'on voit que cette droite (N) sera alors sur le plan des xy. De là résultent ces deux théorèmes :

THÉORÈME. Trois diamètres d'une surface du second ordre étant conjugués; si une droite est parallèle au plan de deux de ces diamètres, sa polaire passera par le troisième; et réciproquement.

THÉORÈME. Trois diamètres d'une surface du second ordre étant conjugués; toute parallèle à l'un d'eux a sa polaire dans le plan des deux autres; et réciproquement.

VARIÉTÉS.

De l'étude et de l'enseignement des sciences mathématiques, chez les aveugles de naissance;

Par M. Penjon, professeur de mathématiques au lycée d'Angers.



Au Rédacteur des *Annales*,

Monsieur,

Vous avez désiré de moi quelques détails sur la manière dont un aveugle de naissance peut acquérir des connaissances en mathématiques et transmettre ensuite ces connaissances à autrui. Vous avez pensé que ces détails pourraient intéresser vos lecteurs, et que sur-tout ils deviendraient utiles à ceux d'entr'eux qui se trouveraient appelés à diriger l'éducation de jeunes-gens privés, comme moi, d'un organe que l'on regarde, avec raison sans doute, comme l'un des plus propres à nous aider puissamment dans un grand nombre d'études et de recherches.

Rien ne peut m'être plus agréable, et rien en même temps ne m'est plus facile, Monsieur, que de satisfaire, sur ce point, votre curiosité et celle de vos lecteurs. Mais je ne dois pas vous dissimuler que j'ai grand'peur qu'il n'en arrive ici comme en tant d'autres rencontres; et qu'après avoir trouvé presque incroyable qu'un homme qui n'a jamais eu l'usage de la vue, ait pu apprendre, cultiver et enseigner les sciences exactes, beaucoup de gens ne disent ensuite: *n'est-ce*

n'est-ce que cela? dès qu'ils sauront que, pour parvenir à son but, l'aveugle de naissance n'a besoin de recourir qu'à des procédés assez naturels, et tels que le simple bon sens pourrait facilement le suggérer à tout homme qui voudrait prendre la peine d'y réfléchir.

Si cette appréhension, quelque fondée qu'elle me paraisse, ne m'a pas semblé un motif suffisant pour me dispenser de satisfaire, Monsieur, à ce que vous m'avez fait l'honneur de demander de moi, je crois du moins pouvoir m'en autoriser pour donner à cette lettre aussi peu d'étendue que la nature du sujet pourra le permettre : sauf ensuite à revenir, une autre fois, sur ce même sujet, si des éclaircissemens ultérieurs sont jugés nécessaires.

Je vais donc exposer, aussi succinctement qu'il me sera possible, la méthode qui me paraît la plus convenable, pour enseigner les mathématiques à un aveugle de naissance, auquel je supposerai d'ailleurs qu'on procure toutes les ressources et facilités que sa situation peut lui rendre utiles. Je dirai, en même temps, quelque chose des moyens que cet aveugle doit ensuite mettre en usage, pour communiquer les connaissances qu'il parvient à acquérir. Je me citerai souvent moi-même en exemple ; car, si l'on en excepte peut-être Saunderson, la plupart des aveugles qui m'ont précédé, se sont peu mis en peine d'instruire le public de leurs procédés. (*)

A l'aide d'un instrument dont il était l'inventeur, Saunderson exécutait toutes les opérations de l'arithmétique, et traçait toutes les figures rectilignes de la géométrie ; mais on ignore comment il s'y prenait pour faire des calculs algébriques, et on ne sait pas davantage comment, à l'aide de cet instrument, il parvenait à enseigner

(*) On trouve quelques détails sur ce sujet dans les *Mélanges physico-mathématiques* de M. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, page 182.

J. D. G.

les autres ; ni comment ses élèves pouvaient parvenir à le comprendre, sans se livrer préalablement à une étude tout à fait étrangère au but principal qu'ils avaient en vue.

Les moyens qu'employait Saunderson avaient encore un autre inconvénient ; c'est qu'il ne pouvait, par leurs secours, acquérir aucune notion des procédés mis en usage par les voyans : ce qui me paraît pourtant si nécessaire que je ne pense pas que l'aveugle puisse autrement enseigner avec quelque succès. Ainsi il faut qu'il soit instruit de la forme des lettres et autres signes, des cas dans lesquels on emploie les lettres majuscules et minuscules, tant grecques que romaines, de la manière dont on dispose ordinairement les calculs et leurs résultats, soit sur le papier soit sur un tableau, etc. ; tous objets sur les moindres détails desquels il est indispensable qu'il soit bien informé.

M. Haüy, ancien instituteur des aveugles, frappé des inconvéniens que présentaient les méthodes employées avant lui, crut devoir recourir à des caractères mobiles, isolés les uns des autres, sensibles au tact, semblables à ceux qui sont en usage parmi les voyans, et dont l'aveugle pût se servir pour représenter les différens mots de la langue, et exécuter toutes les opérations arithmétiques et algébriques. Chacun de ces caractères est gravé en relief, sur l'une des faces d'un parallélipipède rectangle, tandis qu'un autre parallélipipède, aussi rectangle, mais de moindres dimensions, est solidement fixé au milieu de la face opposée du premier. Ce dernier est ce que l'on nomme la *queue* du caractère ; il est destiné à s'engager dans les intervalles que laissent entre elles des traverses de bois, également espacées, fixées à deux côtés opposés d'un chassis rectangulaire posé horizontalement, et parallèles aux deux autres côtés de ce chassis.

Au moyen de cet instrument, appelé *planche*, on pourrait, sans difficulté, exécuter toutes sortes d'opérations algébriques, si le nombre des divers caractères dont on fait usage, dans ces opérations, n'était pas trop considérable. Mais souvent on y emploie concurremment les lettres grecques et romaines, tant majuscules que minuscules, sans

compter les lettres affectées d'accens ou d'indices ; la case qui contiendrait tous ces divers alphabets devrait donc être très-grande : ce qui exigerait plus de temps pour y choisir les caractères, et rendrait ainsi les calculs fort longs. Il est d'ailleurs presque impossible de représenter, avec des caractères mobiles, toutes les diverses sortes de fonctions algébriques, et cela quelque complète que la case puisse être d'ailleurs. Si l'on avait, par exemple, cette quantité a^{x^y}, il faudrait que la case contînt trois sortes de caractères, différant uniquement entre eux par la place qu'ils occuperaient sur leurs parallélipipèdes respectifs; ce qui, en obligeant de donner de grandes dimensions aux parallélipipèdes, exigerait qu'on donnât une largeur proportionnée aux traverses entre lesquelles les queues de ces parallélipipèdes doivent être maintenues, et diminuerait conséquemment le nombre de ces traverses, pour une planche de dimensions données.

Gêné par ces obstacles, dès mes premiers pas dans l'étude de l'algèbre, j'ai pris le parti de me créer des notations mieux appropriées aux seules ressources dont il me soit permis de disposer. Ainsi, par exemple, au lieu de a^{x^y}, j'écris $a \cdot x \cdot y$; pour a^{xy}, j'écris $a \cdot xy$, et ainsi du reste. Privé aussi de l'alphabet grec, je renverse les lettres romaines, pour suppléer à celles de cet alphabet ; de manière que, par exemple, pour représenter [illegible], j'écris *v*. Les parenthèses sont ordinairement de toutes sortes de grandeurs ; mais, dans la case d'un aveugle, elles sont nécessairement limitées ; il m'a donc fallu créer encore des notations pour les remplacer. Enfin, je suis presque toujours forcé d'inventer de nouveaux symboles, à mesure que les calculs et les formules se prolongent et se compliquent.

Ce n'est guère, au surplus, que dans ce cas que j'ai recours aux caractères mobiles ; car on ne peut se dissimuler que leur usage entraîne toujours quelque longueur et quelque embarras. L'aveugle doit donc avoir une planche ; mais il doit, en même temps, apprendre, peu à peu, à s'en passer, du moins dans les cas les plus ordinaires. Il faut, par exemple, qu'il puisse suivre de tête une opération que l'on fait

en sa présence, lors même que cette opération ne donne pas des résultats symétriques. Pour acquérir cette habitude, j'avais soin, dans les commencemens, de répéter, de vive voix, les calculs que j'avais exécutés avec mes lettres mobiles; je me faisais lire aussi des livres d'algèbre, et j'effectuais les opérations qui s'y trouvaient contenues, sans autre secours que celui d'un voyant, qui les écrivait sur un tableau à son usage. Par cet exercice, fréquemment répété, je parvins, en peu de temps, et sans y employer les caractères mobiles, à faire de tête des calculs très-compliqués, tels que ceux de la *Mécanique céleste.* J'avais même acquis assez d'habitude en ce genre, pour suivre, avec quelque fruit, les cours publics de MM. Biot et Francœur. Souvent ce dernier me faisait démontrer de vive voix, tandis qu'il écrivait les résultats sur le tableau. En un mot, je subissais, comme les autres élèves, les examens qu'on fait ordinairement dans les lycées; je concourais avec eux et comme eux; si ce n'est seulement qu'il me fallait un enfant pour écrire ce dont j'avais besoin.

A l'égard de cet enfant, plusieurs personnes ont pensé qu'il fallait que celui dont l'aveugle emprunte le secours fût non seulement un homme fait, mais encore un homme presque aussi instruit que cet aveugle lui-même. C'est là une véritable erreur; l'aveugle n'ayant uniquement besoin que de deux yeux et d'une main qu'il puisse mouvoir à son gré. Mais un enfant ne remplira bien l'objet que l'aveugle se propose, qu'autant que celui-ci prendra soin de l'instruire lui-même. C'est pour cela que j'ai toujours pris avec moi des enfans très-jeunes, auxquels, fort souvent, j'ai même été obligé de montrer à lire, et que je dressais ensuite aux petits services que je pouvais attendre d'eux. Je crois qu'en s'aidant de semblables moyens, un aveugle parviendra à étudier, avec quelque facilité et quelques succès, tant l'algèbre que toutes les sciences qui en dépendent.

Si nous passons de l'étude de l'algèbre à celle de la géométrie (*),

(*) Je parle ici non seulement de la Géométrie proprement dite, mais encore

les difficultés croissent sensiblement. On peut, il est vrai, acquérir l'idée des figures par le tact; mais ces figures sont tellement multipliées que, s'il fallait les faire toutes toucher à l'aveugle, l'étude de la géométrie deviendrait pour lui très-longue et très-pénible. Il me paraît donc plus convenable de suivre la marche que voici : on fera percer de trous, suivant une direction rectiligne, chacune des traverses de la planche dont j'ai parlé plus haut, de manière que chaque trou puisse, au besoin, recevoir une cheville; et l'on pourra ainsi, avec un fil, former les diverses espèces d'angles, de triangles, de quadrilatères, et même plusieurs sortes de polygones, tant réguliers qu'irréguliers. L'élève acquerra par là l'idée de ces figures que désormais je nommerai *primitives*. Il faudra de plus lui faire connaître le cercle, ce qui sera facile, soit en traçant cette figure sur de la terre molle, soit en l'exécutant avec du papier ou du carton. Pour les solides, on les peut construire en bois; et cette méthode se pratique même fréquemment à l'égard des voyans.

Il importe aussi de faire connaître à l'aveugle de quelle manière les voyans représentent les corps sur un tableau; car il se les figure toujours tels qu'ils existent réellement, et ne concevra jamais, à moins qu'on ne le lui explique, qu'on puisse représenter un prisme, une pyramide, un cylindre, un cône, etc., sur une surface plane.

Il est encore un point sur lequel je crois très-nécessaire de m'arrêter : c'est que, pour bien faire connaître des corps, par le tact, à une personne affligée de cécité, il ne suffit pas de lui faire simplement porter la main successivement sur chacun d'eux; car il n'en acquerrait par cette voie que des notions très-imparfaites. Il faut les lui laisser manier à son aise, à diverses reprises, et sans jamais le presser,

de tout ce qui est relatif à cette science; tout comme je distingue l'analise pure de toutes les applications qu'on en peut faire. C'est dans les études purement analitiques que l'aveugle rencontre le moins de difficulté, et c'est pour cela que j'ai cru devoir en parler d'abord.

ni le gêner en aucune manière. Le défaut de cette attention, quelque minutieuse qu'elle puisse paraître d'ailleurs, a sensiblement retardé le progrès de mes études.

Lorsque les figures primitives sont devenues assez familières à l'aveugle pour qu'il puisse les bien concevoir et les définir nettement, il doit s'habituer à démontrer les théorèmes sans toucher à la figure. Il arrivera quelquefois, à la vérité, que la démonstration deviendra tellement compliquée qu'il lui sera presque indispensable, pour pouvoir la suivre, d'en mettre la figure sous ses doigts; mais cela ne doit arriver que rarement; et, dans ce cas même, l'aveugle fera bien de répéter ensuite la démonstration sans figure.

Dans la géométrie transcendante, pour faire connaître à l'aveugle la forme des différentes lignes et surfaces courbes, on pourra lui tracer les premières, par le procédé déjà indiqué pour le cercle, et exécuter les dernières avec de la cire ou de l'argile humide; mais cela néanmoins ne sera le plus souvent nécessaire, ni pour les unes ni pour les autres: le mode de génération d'une ligne ou d'une surface courbe suffisant, dans les cas les plus ordinaires, pour en donner une idée distincte. Il m'arrive même, communément, de deviner la forme qu'affectent les lignes et les surfaces courbes, par la simple connaissance de leurs équations, du moins lorsque ces équations ne sont pas très-compliquées.

Après les détails dans lesquels je viens d'entrer, on sent que l'étude de la mécanique ne pourra offrir beaucoup de nouvelles difficultés. Il faudra seulement prendre la précaution de faire toucher et manier à l'aveugle les diverses machines dont on se proposera de lui exposer les propriétés. Je me rappelle, à ce sujet, que je ne suis parvenu à bien comprendre la génération de la vis, qu'après avoir touché des vis de différentes espèces et dimensions. A cela près, les diverses branches des mathématiques, tant pures qu'appliquées, ne sauraient, en aucune manière, embarrasser l'aveugle, puisqu'il n'y sera jamais question que de géométrie et de calcul.

Cependant, pour laisser le moins possible à désirer sur ce sujet,

je crois devoir ajouter encore, à l'égard de l'optique, que, si l'on fait concevoir à l'aveugle les rayons de la lumière comme des lignes droites; que, s'il conçoit chaque point d'un corps lumineux ou éclairé comme le point commun de départ d'un système de ces rayons qui, conséquemment, doivent aller en s'écartant les uns des autres, à mesure qu'ils s'éloignent de ce point de départ, la réfraction et la réflexion, les propriétés des verres et miroirs plans, convexes, et concaves, et généralement tous les phénomènes de l'optique, non seulement pourront lui être démontrés, mais pourront même être assez nettement conçus par lui, pour qu'il soit en état d'en transmettre la démonstration à autrui.

Chacun convient et aperçoit facilement qu'il est absolument impossible à un aveugle de naissance de se faire aucune idée juste de la lumière et des couleurs; mais, comme la couleur des corps dépend non seulement de la nature des rayons de lumière qu'ils réfléchissent, mais encore de la figure ou de la disposition respective des molécules de leur surface, qui les rend propres à réfléchir tels rayons de lumière de préférence à tels autres; quelques personnes ont pensé que, cette disposition de molécules pouvant devenir sensible au tact, il n'était point hors de vraisemblance qu'elle pût mettre les aveugles en état de distinguer, au toucher, les corps de couleurs différentes. C'est là un point sur lequel je ne voudrais rien décider, d'une manière trop absolue; mais, ce que je puis du moins affirmer, c'est qu'un grand nombre d'aveugles que j'ai connus n'ont pu parvenir, plus que moi, à rencontrer la plus légère différence entre les surfaces des corps différemment colorés; du moins, lorsque toutes les autres circonstances se trouvaient être exactement les mêmes; et leur expérience, jointe à la mienne, me paraît suffisante pour présumer que les causes qui déterminent les corps à être de telle couleur, plutôt que de telle autre, sont de nature à se dérober éternellement au sens du toucher.

Voici, très-probablement, la source de l'erreur où beaucoup de personnes ont été induites sur ce point. Il est certaines étoffes dont

le tissu est très-sensible au tact et sur lesquelles on applique presque toujours les mêmes couleurs. D'un autre côté, les teintures dont on les imprègne peuvent, à raison des divers ingrédiens dont elles se composent, se manifester au toucher; et cette circonstance, réunie à la première, peut souvent donner à l'aveugle des indices à peu près certains. Ainsi, par exemple, je croyais autrefois que toutes les étoffes de camelot étaient rouges; et je m'étais figuré, à l'inverse, que les étoffes douces au toucher devaient être blanches; or, comme ces fausses notions me faisaient quelquefois rencontrer assez juste, on s'imaginait que je discernais réellement les couleurs par le tact.

Il existe encore une question qui n'est point facile à traiter: c'est celle relative à l'idée qu'un aveugle de naissance peut se former du sens de la vue, et à la manière dont il conçoit que ce sens peut faire connaître aux voyans les objets qui sont hors de leur portée. Je me bornerai à dire ce que je pense moi-même à cet égard. Il me semble que les rayons de lumière, partis de chaque point de la surface d'un objet, apportent tous ces points dans l'œil, et les apportent disposés entre eux de la même manière qu'ils le sont dans l'objet; de sorte que la rétine, en touchant ces points, reconnait la figure de ce même objet; et, comme elle connaît aussi les rayons lumineux qui lui présentent cette figure, elle en distingue également la couleur. Il me paraît donc que la rétine est affectée par la lumière, comme l'est la main par l'objet. Peut-être pourrait-on me faire plusieurs difficultés sérieuses à ce sujet? Peut-être même ai-je très-mal rencontré: ce qui n'aurait rien qui dût surprendre, attendu que je n'ai jamais vu? Mais c'est du moins là la seule manière dont je conçoive que la vue puisse suppléer au tact.

Je pourrais entrer, Monsieur, dans beaucoup d'autres détails sur l'instruction des aveugles, et sur les procédés qu'ils doivent suivre pour enseigner, soit aux voyans, soit à d'autres aveugles. Je pourrais parler de leur caractère, qui influe, peut-être, plus qu'on ne pense, sur leur manière de s'instruire; des progrès qu'ils peuvent faire dans les diverses branches de nos connaissances; des jouissances que, malgré

la

la privation du sens de la vue, ils sont susceptibles de goûter; ainsi que des désirs et de la tristesse que leur état, comparé à celui du reste des hommes, peut leur faire éprouver. Je pourrais enfin comparer, sous divers rapports, l'aveugle de naissance à celui qui perd la vue dans un âge où il a déjà acquis et où il peut conserver dans sa mémoire les diverses notions dont cet organe est la source; mais je crains d'avoir déjà trop abusé de l'indulgence de vos lecteurs; et je crois plus convenable, à moins d'une nouvelle provocation, soit de leur part, soit de la vôtre, de terminer ici, en vous priant d'agréer, etc.

Angers, le 14 de novembre 1812.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Démonstrations des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 196 de ce volume;

Par MM. Le Grand, élève à l'école normale,
Ferriot et Lambert, professeurs au lycée de Besançon,
Vecten, professeur au lycée de Nismes,
Labrousse, professeur à Montélimart,
Rochat, professeur de navigation à St-Brieux,
Penjon, professeur au lycée d'Angers,
Gobert, élève de M. Penjon,
C. Beaucourt, élève au lycée de Nismes;
J. F. Français, professeur à l'école de l'artillerie et du génie,
Etc., etc., etc.

THÉORÈME I. *Le plan qui divise l'un des angles dièdres d'un tétraèdre en deux parties égales, partage l'arête opposée en deux*

segmens proportionnels aux aires des faces correspondantes de ce tétraèdre.

THÉORÈME II. *La droite qui, partant du sommet d'un tétraèdre, fait des angles égaux avec les trois faces adjacentes, rencontre sa base en un point tel qu'en le considérant comme le sommet commun de trois triangles, ayant pour bases les trois côtés de cette base, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux aires des faces correspondantes du tétraèdre.*

Les démonstrations qui ont été fournies de ces deux théorèmes étant extrêmement variées, nous croyons devoir nous borner à celles qui nous ont paru les plus remarquables par leur simplicité.

MM. Ferriot, Vecten, Rochat, C. Beaucourt et un géomètre de Lyon qui ne s'est pas nommé, ont fondé les leurs sur les deux Lemmes suivans, qui nous sembleraient devoir trouver place dans tous les élémens de géométrie; mais que nous nous dispenserons pourtant de démontrer, attendu que leur démonstration ne saurait offrir aucune difficulté.

LEMME I. Le plan qui divise un angle dièdre en deux parties égales, a chacun de ses points également distans des deux faces de cet angle dièdre. C'est évidemment le lieu des centres de toutes les sphères et celui des axes de tous les cylindres et cônes de révolution qui touchent à la fois les deux faces de l'angle dièdre.

LEMME II. Les plans qui divisent en deux parties égales les angles dièdres d'un angle trièdre se coupent tous trois suivant une même droite, qui fait des angles égaux avec les trois faces de l'angle trièdre, et dont chacun des points est également distant des ces trois faces. Cette droite est le lieu des centres de toutes les sphères tangentes aux faces de l'angle trièdre. C'est encore l'axe du cône de révolution inscrit à ce même angle.

Cela posé, soient A, B, C, D, (*) les quatre sommets d'un

(*) Nous nous dispensons de faire la figure, qui est fort simple, et qu'il est très-facile de suppléer.

tétraèdre ; soit E le point où l'arête CD est coupée par le plan qui divise en deux parties égales l'angle dièdre dont l'arête est AB ; soit en outre F le point de BE où la face CBD est rencontrée par la droite qui, partant du sommet A, fait des angles égaux avec les trois faces adjacentes à ce sommet.

I. En considérant les deux tétraèdres ADBE et ACBE comme ayant leur sommet commun en A, leurs volumes seront proportionnels aux aires de leurs bases DBE, CBE ; et, comme ces bases sont des triangles qui ont leur sommet commun en B, leurs aires seront elles-mêmes proportionnelles à leurs bases ED, EC ; ainsi, l'on aura

$$\textit{Vol.}\mathrm{ADBE} : \textit{Vol.}\mathrm{ACBE} :: \mathrm{ED} : \mathrm{EC}.$$

D'un autre côté, en considérant ces mêmes tétraèdres comme ayant leur sommet commun en E, ils auront même hauteur (*Lemme I*), puisque E est un des points du plan AEB qui divise en deux parties égales l'angle dièdre dont l'arête est AB ; les volumes de ces tétraèdres seront donc proportionnels aux aires de leurs bases ADB et ACB ; c'est-à-dire, qu'on aura

$$\textit{Vol}\,\mathrm{ADBE} : \textit{Vol.}\mathrm{ACBE} :: \mathrm{ADB} : \mathrm{ACB} ;$$

d'où on conclura, à cause du rapport commun,

$$\mathrm{ADB} : \mathrm{ACB} :: \mathrm{ED} : \mathrm{EC} ;$$

ce qui est le premier des deux théorèmes.

M. Gobert a fourni une démonstration analitique fort élégante de ce théorème.

M......, de Lyon, a remarqué que la recherche du point E se réduit à partager CD en parties proportionnelles aux aires des triangles ACB, ADB ou, plus simplement, proportionnelles aux perpendiculaires abaissées des points C, D sur la base commune AB de ces deux triangles.

II. Si l'on considère les tétraèdres ABFC, ACFD, ADFB, comme ayant leur sommet commun en A, ils auront même hauteur, et l'on aura conséquemment

$$Vol.\mathrm{ABFC} : Vol.\mathrm{ACFD} : Vol.\mathrm{ADFB} :: \mathrm{BFC} : \mathrm{CFD} : \mathrm{DFB}.$$

Si, d'un autre côté, on considère ces mêmes tétraèdres comme ayant le point F pour sommet commun, ils auront encore même hauteur (*Lemme II*), puisque F est un des points de la droite AF qui forme des angles égaux avec les trois faces BAC, CAD, DAB; on aura donc encore

$$Vol.\mathrm{ABFC} : Vol.\mathrm{ACFD} : Vol.\mathrm{ADFB} :: \mathrm{BAC} : \mathrm{CAD} : \mathrm{DAB};$$

on aura donc, par la comparaison de cette suite de rapports égaux avec la précédente,

$$\mathrm{BFC} : \mathrm{CFD} : \mathrm{DFB} :: \mathrm{BAC} : \mathrm{CAD} : \mathrm{DAB};$$

ce qui est le dernier des deux théorèmes.

M...., de Lyon, a remarqué que la recherche du point F se réduit à déterminer, sur deux des côtés du triangle BCD, des points qui soient situés, sur ces côtés, de la même manière que l'est le point E sur CD, et à joindre ces points aux sommets opposés par des droites, dont l'intersection déterminera le point cherché.

Les démonstrations de M. Penjon diffèrent peu des précédentes.

M. Français démontre le premier des deux théorèmes comme il suit :

Soit faite une projection orthogonale du tétraèdre, sur un plan perpendiculaire à BE, et conséquemment aux plans AEB et CBD, en désignant les projections des points par les mêmes lettres qui désignent ces points, mais affectées d'accens, on aura d'abord

$$\mathrm{ED} : \mathrm{EC} :: \mathrm{E'D'} : \mathrm{E'C'};$$

mais, en considérant les triangles $D'A'E'$ et $C'A'E'$ comme ayant leur sommet commun en A', on aura

$$E'D' : E'C' :: Aire\ E'A'D' : Aire\ E'A'C' ;$$

enfin, les triangles BDA et BCA formant respectivement des angles dièdres égaux avec leurs projections $E'D'A'$ et $E'C'A'$, on aura encore

$$Aire\ E'A'D' : Aire\ E'A'C' :: Aire\ BAD : Aire\ BAC ;$$

et, en rapprochant ces trois proportions, on en conclura

$$Aire\ BAD : Aire\ BAC :: ED : EC.$$

Au lieu de faire la projection sur un plan perpendiculaire à BE, on peut la faire sur un plan perpendiculaire à AB ; cette projection sera alors évidemment un triangle $D'A'C'$ dans lequel $A'E'$ divisera l'angle A' en deux parties égales ; on aura donc, par le théorème connu de géométrie plane,

$$A'D' : A'C' :: E'D' : E'C' \text{ ou} :: ED : EC ;$$

mais, parce que $A'D'$ et $A'C'$ sont les hauteurs respectives des triangles de mêmes bases ADB et ACB, on aura aussi

$$Aire\ ADB : Aire\ ACB :: A'D' : A'C' ;$$

on aura donc également

$$Aire\ ADB : Aire\ ACB :: ED : EC.$$

C'est à peu près à cela que reviennent les démonstrations du premier théorème, fournies par MM. Le Grand, Labrousse et Lambert. Ils en déduisent ensuite celle du second.

M. Français démontre ce dernier de la manière suivante. Soient α l'angle que fait AF avec les trois faces latérales, et φ l'angle que fait la même droite avec le plan de la base. Soit projeté orthogonalement le tétraèdre sur un plan perpendiculaire à cette droite AF; les projections des faces latérales se confondront avec les projections des segmens de la base; et l'on aura, par un principe connu,

$$\text{Aire } B'F'C' = \text{Aire } BAC.\text{Sin}.\alpha = \text{Aire } BFC.\text{Sin}.\varphi\ ,$$

$$\text{Aire } C'F'D' = \text{Aire } CAD.\text{Sin}.\alpha = \text{Aire } CFD.\text{Sin}.\varphi\ ,$$

$$\text{Aire } D'F'B' = \text{Aire } DAB.\text{Sin}.\alpha = \text{Aire } DFB.\text{Sin}\ \varphi\ ,$$

d'où on conclura, sur-le-champ,

$$\text{Aire} BAC : \text{Aire } CAD : \text{Aire } DAB :: \text{Aire } BFC : \text{Aire } CFD : \text{Aire} DFB.$$

Ces diverses considérations peuvent, pour la plupart, être employées à démontrer, autrement qu'on ne le fait communément, que *la droite qui divise l'un des angles d'un triangle en deux parties égales, partage le côté opposé en deux segmens proportionnels aux côtés correspondans.*

M. Le Grand, à qui l'on doit les deux élégans théorèmes qui font le sujet de cet article, remarque que, de même que de celui qui vient d'être rappelé, et qui est leur correspondant dans la géométrie plane, il résulte que *le centre des moyennes distances du contour d'un triangle est le centre du cercle inscrit au triangle dont les sommets seraient les centres des moyennes distances des côtés du premier* (*); on peut semblablement conclure de ces deux-ci, que *le centre des moyennes distances de la surface d'un tétraèdre est le centre de la sphère inscrite au tétraèdre qui aurait*

(*) Voyez les *Élémens de statique* de M. Poinsot, page 172.

ses sommets aux centres des moyennes distances des aires des faces du premier. Nous observerons, à notre tour, que tout ceci forme un très-beau supplément aux *Analogies, entre le triangle et le tétraèdre*, données par M. Ferriot à la page 133 du deuxième volume de ce recueil.

Nous remarquerons, en terminant, que, de même que le théorème de géométrie plane qui correspond à ces deux-ci, peut facilement être démontré par la formule qui donne l'aire d'un triangle en fonction de deux de ses côtés et de l'angle qu'ils comprennent, ces derniers peuvent aussi se démontrer à l'aide de la formule suivante, qui est son analogue pour le tétraèdre, et à laquelle il est aisé de parvenir.

Soit T le volume d'un tétraèdre dont les sommets soient A, B, C, D; en désignant par les trois lettres placées à leurs sommets les aires des faces, et par les deux lettres placées à leurs extrémités tant les longueurs des arêtes que les angles dièdres auxquels ces arêtes appartiennent, on a

$$T=\frac{2}{3}.\frac{ACB\times ADB}{AB}.\mathit{Sin}.AB.$$

Le tétraèdre fournit huit équations de cette forme qui, combinées soit entre elles soit avec les quatre équations qui donnent l'aire d'une face en fonction des aires des trois autres et des angles que forment leurs plans deux à deux, peuvent conduire à diverses conséquences remarquables.

QUESTION PROPOSÉE.

Problème de Géométrie.



TROUVER, sur le plan de l'une des bases d'un prisme triangulaire, un point dont la somme des distances aux trois sommets de l'autre base du prisme soit un *minimum*? (*)

(*) Le problème peut être généralisé, en l'étendant à un tronc de prisme triangulaire.

ANALISE TRANSCENDANTE.

Troisième mémoire sur les Facultés numériques. (*)

Par M. Kramp, professeur, doyen de la faculté des sciences de l'académie de Strasbourg.



1. Dans le précédent mémoire, nous avons évalué le produit des facteurs

$$1-\frac{x^2}{a^2}, \quad 1-\frac{x^2}{(a+r)^2}, \quad 1-\frac{x^2}{(a+2r)^2}, \quad 1-\frac{x^2}{(a+3r)^2}, \ldots\ldots$$

continué jusqu'à l'infini; et nous l'avons trouvé égal à

$$\frac{f!f!}{\left(f+\frac{x}{r}\right)!\left(f-\frac{x}{r}\right)!};$$

en faisant, pour abréger, $\frac{a}{r}-1=f$, ce qui donne $1+f=\frac{a}{r}$. Pour éviter les formes fractionnaires, soit $a=hr$, $x=ry$; nous aurons ainsi

$$\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\ldots=\frac{(h-1)!(h-1)!}{(h-1+y)!(h-1-y)!},$$

le premier membre étant prolongé à l'infini.

(*) Voyez les pages 1 et 114 de ce volume.

2. Cette expression admet des réductions ultérieures. D'après le théorème connu $a^{m+n|r}=a^{m|r}(a+mr)^{n|r}$, on aura, dans le cas particulier de $a=1$, $r=1$

$$(m+n)!=m!(1+m)^{n|1};$$

ce qui donne

$$(h-1+y)!=(h-1)!\,h^{y|1};$$

$$(h-1-y)!=(h-1)!\,h^{-y|1},$$

en conséquence, en désignant par P le produit infini qui nous occupe, nous aurons

$$P=\frac{(h-1)!\,(h-1)!}{(h-1+y)!\,(h-1-y)!}=\frac{1}{h^{y|1}.h^{-y|1}}.$$

3. Comme on a, par les formules connues,

$$h^{-y|1}=\frac{1}{(h-y)^{y|1}},$$

on pourra encore écrire

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}.$$

Comme tous les facteurs du produit P ne renferment que les quarrés de y, il doit être permis d'y remplacer $+y$ par $-y$, et réciproquement ; de sorte que les expressions

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}} \quad \text{et} \quad \frac{(h+y)^{-y|1}}{h^{-y|1}},$$

doivent être identiquement les mêmes. Elles le sont effectivement ; et, en employant les réductions que nous avons enseignées, l'une se transforme facilement dans l'autre.

4. Le théorème binomial est applicable aux factorielles (*). On a

(*) Voyez l'*Arithmétique universelle* de l'auteur.

J. D. G.

$$(A+B)^{n|r}=A^{n|r}+\frac{n}{1}A^{n-1|r}B+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A^{n-2|r}B^{2|r}+\ldots;$$

$$(A-B)^{n|r}=A^{n|r}-\frac{n}{1}A^{n-1|r}B+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}A^{n-2|r}B^{2|r}-\ldots.$$

Divisant la première égalité par $A^{n|r}$, pour que le premier terme de la série soit égal à l'unité, et se rappelant que

$$A^{n-1|r}=\frac{A^{n|r}}{A+nr-r},$$

$$A^{n-2|r}=\frac{A^{n|r}}{(A+nr-2r)^{2|r}},$$

$$A^{n-3|r}=\frac{A^{n|r}}{(A+nr-3r)^{3|r}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

on la transformera en

$$\frac{(A+B)^{n|r}}{A^{n|r}}=1+\frac{nB}{A+nr-r}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2(A+nr-2r)^{2|r}}+\ldots\ldots;$$

et, en appliquant cette formule aux deux expressions de P que nous venons de trouver; savoir:

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(h+y)^{-y|1}}{h^{-y|1}},$$

elles deviendront

$$P=1-\frac{y^2}{h+y-1}+\frac{y^2(y-1)^2}{1.2(h+y-1)(h+y-2)}-\frac{y^2(y-1)^2(y-2)^2}{1.2.3(h+y-1)(h+y-2)(h+y-3)}+\ldots..$$

$$P=1-\frac{y^2}{h-y-1}+\frac{y^2(y+1)^2}{1.2(h-y-1)(h-y-2)}-\frac{y^2(y+1)^2(y+2)^2}{1.2.3(h-y-1)(h-y-2)(h-y-3)}+\ldots..$$

Ces deux séries sont effectivement identiques entre elles, sans que leur forme, très-peu favorable, laisse entrevoir cette identité.

5. Pour remédier à cet inconvénient, reprenons le premier développement

$$\frac{(A+B)^{n|r}}{A^{n|r}}=1+\frac{nB}{A+nr-r}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2(A+nr-r)^{2|r}}+\dots\dots ,$$

et faisons $A+nr-r=a$, ce qui donne $A=a-nr+r$, et $A+B$ $a+B-nr+r$. On aura ainsi

$$A^{n|r}=(a-nr+r)^{n|r}=a^{n|-r},$$

$$(A+B)^{n|r}=(a+B-nr+r)^{n|r}=(a+B)^{n|-r};$$

ce qui donne

$$\frac{(a+B)^{n|-r}}{a^{n|-r}}=1+\frac{nB}{a}+\frac{n(n-1)B^{2|r}}{1.2a^{2|-r}}+\frac{n(n-1)(n-2)B^{3|r}}{1.2.3a^{3|-r}}+\dots$$

C'est là le premier des *huit* théorèmes qu'on trouve à la page 63 de mon *Analise des réfractions*. Il ne m'a pas paru nécessaire d'en ajouter les démonstrations, lesquelles, comme on vient de voir, se seraient réduites à quelques développemens de calculs fort simples.

6. Enfin, si, dans cette expression, on fait $a=h$, $B=-y$, $n=y$ et $r=1$, on trouvera

$$P=\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\dots\dots=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=$$

$$1-\frac{y^2}{h}+\frac{y^2(y^2-1)}{1.2h(h+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.2.3h(h+1)(h+2)}+\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)}{1.2.3.4h(h+1)(h+2)(h+3)}-\dots$$

Cette série, remarquable par sa forme, et qui a l'avantage précieux de pouvoir être rendue convergente à volonté, dans tous les cas, ne renferme que les quarrés de y, ce qui est exigé par la nature du problème.

7. Indépendamment du calcul des factorielles, on peut y parvenir immédiatement de la manière qui suit. Faisons

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=P=1-Ay^2+By^2(y^2-1)+Cy^2(y^2-1)(y^2-4)+\dots;$$

en posant successivement $y=1, 2, 3, 4, \ldots$ on aura

$$\frac{h-1}{h}=1-A\,,$$

$$\frac{(h-2)(h-1)}{h(h+1)}=1-4A+12B\,,$$

$$\frac{(h-3)(h-2)(h-1)}{h(h+1)(h+2)}=1-9A+72B-360C\,,$$

$$\frac{(h-4)(h-3)(h-2)(h-1)}{h(h+1)(h+2)(h+3)}=1-16A+240B-2880C+20160D\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

d'où, par un calcul très-facile, on déduit pour A, B, $C, \ldots$ les mêmes valeurs que nous venons d'obtenir.

8. En multipliant cette même série par $1-\frac{y^2}{(h-1)^2}$, il doit en résulter ce qu'elle devient en y remplaçant simplement la lettre h par $h-1$. Pour faire cette multiplication, considérons que y^2 peut être remplacé

$$\text{par } 1+(y^2-1)\,,$$

$$\text{par } 4+(y^2-4)\,,$$

$$\text{par } 9+(y^2-9)\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\,;$$

ce qui suffit pour rendre au produit sa forme primitive. Il deviendra alors, avec cette attention,

$$1-y^2\left\{\frac{1}{h}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{1}{h(h-1)^2}\right\}$$

$$+\frac{y^2(y^2-1)}{h}\left\{\frac{1}{2(h+1)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{2}{(h+1)(h-1)^2}\right\}$$

$$-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2h(h+1)}\left\{\frac{1}{3(h+2)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{3}{(h+2)(h-1)^2}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

or,

$$\frac{1}{h}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{1}{h(h-1)^2}=\frac{1}{h-1},$$

$$\frac{1}{2(h+1)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{2}{(h+1)(h-1)^2}=\frac{1}{2(h-1)},$$

$$\frac{1}{3(h+2)}+\frac{1}{(h-1)^2}-\frac{3}{(h+2)(h-1)^2}=\frac{1}{3(h-1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

ce produit sera donc, en effet,

$$1-\frac{y^2}{h-1}+\frac{y^2(y^2-1)}{2(h-1)h}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3(h-1)h(h+1)}+\ldots\ldots;$$

conformément à la nature du problème.

9. Il suit des résultats que nous venons d'obtenir, qu'en faisant y égal à un nombre entier quelconque, positif ou négatif, le produit P, continué à l'infini, est toujours une quantité entièrement rationnelle, quel que soit h (*). Il s'ensuit encore qu'en faisant y égal à h *plus* ou *moins* un nombre entier quelconque, la valeur de la série, développement de P, est constamment *zéro*. Nous remarquerons encore que, lorsque h est un nombre entier quelconque, cette série est égale à $\frac{\text{Sin}.\varpi y}{\varpi y}$, multiplié par quelque facteur entièrement rationnel; et que, lorsque y est un nombre entier, plus la fraction $\frac{1}{2}$, cette même série est toujours un multiple de $\text{Cos}.\varpi y$.

(*) Pourvu cependant que h ne soit point un nombre entier *négatif*.
J. D. G.

10. Effectivement, faisons, dans les théorèmes précédens, $h=1$; nous aurons, d'un côté

$$\left(1-\frac{y^2}{1}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\ldots\ldots ;$$

produit que l'on sait être égal à $\frac{\text{Sin.}\pi y}{\pi y}$, et de l'autre la série

$$1-\frac{y^2}{1}+\frac{y^2(y^2-1)}{1.4}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.4.9}+\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)}{1.4.9.16}-\ldots\ldots$$

On peut aisément vérifier que cette série s'évanouit, en effet, pour toutes les valeurs entières de y. Mais il importe de nous assurer, par un exemple, que cette série est effectivement applicable à toutes les valeurs fractionnaires de y; de plus, nous devons montrer que la série est convergente à volonté. Cherchons, en conséquence, d'après cette même série, le sinus de l'angle de 66.°36′, égal à $0,37\pi$; ce qui donne $y=0,37$; et

$$y^2=+0,1369\,,\quad y^2-16=-15,1369\,,$$
$$y^2-1=-0,8631\,,\quad y^2-25=-24,1369\,,$$
$$y^2-4=-3,8631\,,\quad y^2-36=-35,1369\,,$$
$$y^2-9=8,8631\,,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On aura de plus

$$1-y^2=0,8631000\,,\quad 1-\frac{y^2}{25}=0,9945240\,,$$
$$1-\frac{y^2}{4}=0,9657750\,;\quad 1-\frac{y^2}{46}=0,9961972\,,$$
$$1-\frac{y^2}{9}=0,9847889\,;\quad 1-\frac{y^2}{39}=0,9972061\,,$$
$$1-\frac{y^2}{16}=0,9914438\,,\quad 1-\frac{y^2}{64}=0,9978609\,;$$

et par conséquent

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{1}\right)=9.9360611\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{4}\right)=9.9848760\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{9}\right)=9.9933432\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{16}\right)=9.9962680\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{25}\right)=9.9976153\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{36}\right)=9.9983454\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{49}\right)=9.9987849\,,\\
\text{Log.}\left(1-\frac{y^2}{64}\right)=9.9990700\,;
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\text{Somme} =9.9043639\,,\\
\text{Log.}0{,}37=9.5682017\,,\\
\text{Log.}\,\pi =0{,}4971499\,,\\
\hline
\text{Somme}=9.9697155\,.
\end{array}$$

Ainsi, le logarithme du produit des facteurs de Sin.66.°36′, jusqu'au facteur $1-\frac{y^2}{64}$ inclusivement, est 9.9697155. Le produit des autres facteurs est

$$\left(1-\frac{y^2}{81}\right)\left(1-\frac{y^2}{100}\right)\left(1-\frac{y^2}{121}\right)\ldots\ldots$$

continué à l'infini; c'est-à-dire, la série

$$1-\frac{y^2}{h}+\frac{y^2(y^2-1)}{2h(h+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3h(h+1)(h+2)}+\ldots\ldots$$

en y faisant $y=0{,}37$ et $h=9$;
or, en posant

A

$$A=\frac{y^2}{h}, \qquad E=D.\frac{(y^2-16)}{5(h+4)},$$

$$B=A.\frac{(y^2-1)}{2(h+1)}, \qquad F=E.\frac{(y^2-25)}{6(h+5)},$$

$$C=B.\frac{(y^2-4)}{3(h+2)}, \qquad G=F.\frac{(y^2-36)}{7(h+6)},$$

$$D=C.\frac{(y^2-9)}{4(h+3)}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

cette série se réduit à

$$1-A-B-C-D-E-F-G-\ldots\ldots ;$$

et l'on a

$$\left.\begin{array}{l}
A=\frac{0,1369}{1.9}\quad =0,0152111\ , \\
B=\frac{0,8631}{2.10}A=0,0006564\ , \\
C=\frac{3,8631}{3.11}B=0,0000768\ , \\
D=\frac{8,8631}{4.12}C=0,0000142\ , \\
E=\frac{15,8631}{5.13}D=0,0000035\ , \\
F=\frac{24,8631}{6.14}E=0,0000010\ , \\
G=\frac{35,8631}{7.15}F=0,0000003\ ;
\end{array}\right\} \text{Somme} =0,0159633.$$

Ainsi le produit de tous les facteurs ultérieurs de la valeur de Sin.66.°36′ est 0,9840367, dont le logarithme 9.9930113, ajouté au logarithme déjà trouvé 9,9697155, donne 9.9627268, pour le logarithme de Sin.66.°36′, exact à deux unités décimales du dernier ordre près.

11. Faisant, dans la même série, $h=\frac{1}{2}$, on aura, d'un côté, le produit

$$\left(1-\frac{4y^2}{1}\right)\left(1-\frac{4y^2}{9}\right)\left(1-\frac{4y^2}{25}\right)\left(1-\frac{4y^2}{49}\right)\ldots\ldots,$$

que nous savons être égal à $\text{Cos.}\pi y$. De l'autre, nous aurons la série

$$1-\frac{2y^2}{1}+\frac{4y^2(y^2-1)}{1.2.1.3}-\frac{8y^2(y^2-1)(y^2-4)}{1.2.3.1.3.5}+\ldots\ldots,$$

laquelle exprimera aussi conséquemment $\text{Cos.}\pi y$, et sera effectivement applicable, dans tous les cas particuliers.

12. L'objet principal que nous nous proposons dans ce mémoire et dans ceux qui le suivront, c'est de décomposer toute suite infinie proposée

$$1-ay^2+by^4-cy^6+dy^8-\ldots.$$

en facteurs de l'une ou de l'autre des deux formes

$$1-\frac{y^2}{h^2}, \quad 1+\frac{y^2}{h^2},$$

dans les cas où cette décomposition est effectivement possible. Ces cas sont beaucoup plus fréquens qu'on ne le suppose ordinairement; les problèmes les plus difficiles et les plus importans de mécanique et d'astronomie, inaccessibles aux méthodes ordinaires, conduisent finalement à de pareilles séries, et se trouvent ainsi réductibles à nos facultés numériques. Dans cette vue, nous nous proposerons les problèmes préliminaires qui suivent:

13. Essayons de réduire le produit

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots\{y^2-(n-1)^2\},$$

au langage des factorielles; nous trouverons

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots\{y^2-(n-1)^2\}=y.(y-n+1)^{2n-1|1}.$$

Appliquant le théorème binomial à la factorielle

$$(y-n+1)^{2n-1|1},$$

elle deviendra

$$\{y-(n-1)\}^{2n-1|1}=y^{2n-1|1}-\frac{2n-1}{1}(n-1)y^{2n-2|1}$$
$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}(n-1)(n-2)y^{2n-3|1}$$

$$-\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}(n-1)(n-2)(n-3)y^{2n-4|1}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour multiplier cette série par y, remarquons que

$$y.y^{2n-1|1}=y^{2n|1}-(2n-1).y^{2n-1|1},$$
$$y.y^{2n-2|1}=y^{2n-1|1}-(2n-2).y^{2n-2|1},$$
$$y.y^{2n-3|1}=y^{2n-2|1}-(2n-3).y^{2n-3|1},$$
$$y.y^{2n-4|1}=y^{2n-3|1}-(2n-4).y^{2n-4|1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

au moyen de ces réductions, on trouvera

$$y^2\{y^2-1\}\{y^2-4\}\{y^2-9\}\ldots\{y^2-(n-1)\}$$

$$=y^{2n|1}-\frac{2n-1}{1}ny^{2n-1|1}$$

$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}n(n-1)y^{2n-2|1}$$

$$-\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}n(n-1)(n-2)y^{2n-3|1}$$

$$+\frac{2n-1}{1}\cdot\frac{2n-2}{2}\cdot\frac{2n-3}{3}\cdot\frac{2n-4}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)y^{2n-4|1}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

L'application aux cas particuliers de l'exposant n est facile. Comme la formule, finalement développée, ne doit renfermer que les puissances paires de y, et qu'ainsi les termes qui composent les coefficiens des puissances impaires doivent tous se détruire mutuellement, il en résulte une suite de théorèmes particuliers que nous laissons à découvrir au lecteur.

14. Il peut importer de connaître le logarithme naturel de la fonction

$$P=\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}.$$

On trouve, par les formules connues,

$$\text{Log.}P = y\,\text{Log.}\frac{h-y}{h+y} + (h-\tfrac{1}{2})\,\text{Log.}\frac{h^2}{h^2-y^2} - \Gamma\frac{1}{h-y} + 2\Gamma\frac{1}{h} - \Gamma\frac{h+y}{1}.\ (*)$$

Cette expression est réductible en série de la forme

$$-\text{Log.}P = A\frac{y^2}{h^2} + B\frac{y^4}{h^4} + C\frac{y^6}{h^6} + D\frac{y^8}{h^8} + \ldots\ldots$$

dans laquelle on a

$$A = h + \tfrac{1}{2} + \frac{2B_2}{h} + \frac{12B_4}{3h^3} + \frac{30B_6}{5h^5} + \frac{56B_8}{7h^7} + \ldots\,,$$

$$B = \frac{h}{6} + \tfrac{1}{4} + \frac{2B_2}{h} + \frac{30B_4}{3h^3} + \frac{140B_6}{5h^5} + \frac{420B_8}{7h^7} + \ldots\,,$$

$$C = \frac{h}{15} + \tfrac{1}{6} + \frac{2B_2}{h} + \frac{56B_4}{3h^3} + \frac{420B_6}{5h^5} + \frac{1848B_8}{7h^7} + \ldots\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

B_2, B_4, B_6,.... étant les *Nombres de Bernoulli*. La convergence de ces séries dépendant de la grandeur du nombre désigné par h, elles peuvent être considérées comme convergentes à volonté.

15. Il a été prouvé, en son lieu, que le théorème binomial est applicable aux factorielles. La fonction

$$P = \frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}\,,$$

admet un théorème parfaitement analogue. Pour l'exposer, avec clarté, désignons par A, B, C, D,.... respectivement les facteurs y^2, y^2-1, y^2-4, y^2-9,....; et par N, O, P, Q,.... les facteurs y^2-n^2, $y^2-(n+1)^2$, $y^2-(n+2)^2$, $y^2-(n+3)^2$,...., de manière qu'on ait

$$\begin{array}{ll} A=y^2\ ; & N=y^2-n^2\ ; \\ B=y^2-1\ , & O=y^2-(n+1)^2\ , \\ C=y^2-4\ , & P=y^2-(n+2)^2\ , \\ D=y^2-9\ , & Q=y^2-(n+3)^2\ , \\ E=y^2-16\ , & R=y^2-(n+4)^2\ , \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

(*) Voyez les précédens mémoires.

Proposons-nous ensuite de développer le produit $ABCD\ldots\ldots$ en une série de la forme $NOPQ\ldots\ldots+aNOP\ldots\ldots+bNO\ldots\ldots+cN\ldots\ldots+d\ldots\ldots+\ldots\ldots$; on voit que les coefficiens a, b, c, d,.... doivent nécessairement être fonctions, tant de n que du nombre des facteurs du produit $ABCD\ldots\ldots$ On voit de plus que, si le nombre de ces facteurs est fini, celui des termes de la série qu'on demande le sera de même. Voici les formules générales qui contiennent la solution du problème; on trouve

Pour *un* facteur : $A \;=N+n^2$.

Pour *deux* facteurs : $AB=NO+2(n+1)nN+(n+1)n^2(n-1)$.

Pour *trois* facteurs : $ABC=NOP+3(n+2)nNO$

$$+3(n+2)(n+1)n\,(n-1)N$$
$$+\,(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2).$$

Pour *quatre* facteurs : $ABCD=NOPQ+4(n+3)nNOP$

$$+6(n+3)(n+2)n(n-1)NO$$
$$+4(n+3)(n+2)(n+1)n\,(n-1)(n-2)N$$
$$+\,(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3).$$

Pour *cinq* facteurs : $ABCDE=NOPQR$

$$+\,5(n+4)nNOPQ$$
$$+10(n+4)(n+3)n(n-1)NOP$$
$$+10(n+4)(n+3)\,(n+2)n(n-1)\,(n-2)NO$$
$$+\,5(n+4)(n+3)\,(n+2)\,(n+1)n\,(n-1)(n-2)(n-3)N$$
$$+\,(n+4)(n+3)\,(n+2)\,(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

et ainsi des autres.

16. La loi de ces séries est manifeste. En exposant la méthode qui m'y a conduit, j'en aurai donné la démonstration. Supposons donc que, de $ABCDE$, on veuille passer à $ABCDEF$. On a trouvé

$$ABCDE=NOPQR+aNOPQ+bNOP+cNO+dN+e.$$

Les coefficiens numériques sont de simples produits de facteurs décroissans, depuis $n+4$ et n, et multipliés par les coefficiens de la cinquième puissance du binôme. Il faudra multiplier tous les termes de cette expression par $F=y^2-25$. On remarquera que

$$F=y^2-\quad n^2\quad +\quad n^2\quad -25=N+(n+5)(n-5)\ ;$$
$$F=y^2-(n+1)^2+(n+1)^2-25=O+(n+6)(n-4)\ ;$$
$$F=y^2-(n+2)^2+(n+2)^2-25=P+(n+7)(n-3)\ ;$$
$$F=y^2-(n+3)^2+(n+3)^2-25=Q+(n+8)(n-2)\ ;$$
$$F=y^2-(n+4)^2+(n+4)^2-25=R+(n+9)(n-1)\ ;$$
$$F=y^2-(n+5)^2+(n+5)^2-25=S+(n+10)n.$$

On multipliera par la *dernière* de ces valeurs de F le produit $NOPQR$; par l'*avant-dernière* le produit $NOPQ$, et ainsi des autres. Le produit demandé prendra ainsi la forme d'une série telle que

$$ABCDEF=NOPQRS+a'NOPQR+b'NOPQ+c'NOP+d'NO+e'N+f'\ ,$$

dans lequel on aura

$$a'=a+(n+10)n\ ,$$
$$b'=b+(n+9)(n-1)a\ ,$$
$$c'=c+(n+8)(n-2)b\ ,$$
$$d'=d+(n+7)(n-3)c\ ,$$
$$e'=e+(n+6)(n-4)d\ ,$$
$$f'=(n+5)(n-5)e\ ;$$

ce qui donnera

$$a'=\ 6(n+5)n\ ,$$
$$b'=15(n+5)(n+4)n(n-1)\ ,$$
$$c'=20(n+5)(n+4)(n+3)n(n-1)(n-2)\ ,$$
$$d'=15(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)n(n-1)(n-2)(n-3)\ ,$$
$$e'=\ 6(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ ,$$
$$f'=\ (n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Et ainsi des autres.

17. Pour approcher du but que nous nous proposons, essayons de transformer la série

$$a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots\ldots\ ,$$

en un autre série de cette forme

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)+e'y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots$$

En désignant l'une et l'autre séries par $\mathrm{F}y$, on aura

$$\mathrm{F}0=a'\ ;$$
$$\mathrm{F}1=a'+b'\ ;$$

$$F2=a'+4b'+12c'\ ;$$
$$F3=a'+9b'+72c'+360d'\ ;$$
$$F4=a'+16b'+240c'+2880d'+20160e'\ ;$$
$$F5=a'+25b'+600c'+12600d'+201600e'+1814400f'\ ;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'on trouvera facilement, d'après cela,

$$a'=2.\frac{\frac{1}{2}Fo}{0!}\ ,$$
$$b'=2\left\{\frac{F1}{2!}-\frac{\frac{1}{2}Fo}{1!1!}\right\},$$
$$c'=2\left\{\frac{F2}{4!}-\frac{F1}{1!3!}+\frac{\frac{1}{2}Fo}{2!2!}\right\},$$
$$d'=2\left\{\frac{F3}{6!}-\frac{F2}{1!5!}+\frac{F1}{2!4!}-\frac{\frac{1}{2}Fo}{3!3!}\right\},$$
$$e'=2\left\{\frac{F4}{8!}-\frac{F3}{1!7!}+\frac{F2}{2!6!}-\frac{F1}{3!5!}+\frac{\frac{1}{2}Fo}{4!4!}\right\},$$
$$f'=2\left\{\frac{F5}{10!}-\frac{F4}{1!9!}+\frac{F3}{2!8!}-\frac{F2}{3!7!}+\frac{F1}{4!6!}-\frac{\frac{1}{2}Fo}{5!5!}\right\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ ;$$

résultats dont la loi est manifeste.

18. La détermination des fonctions Fo, $F1$, $F2$,.... ou

$$Fo=a\ ,$$
$$F1=a+b+c+d+e+f+\ldots\ldots,$$
$$F2=a+4b+16c+64d+256e+1024e+4096f+\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dépend, en général, de la sommation de la série

$$Fy=a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots\ldots\ ;$$

mais il y a des cas très-nombreux où la valeur de cette série est connue pour toutes les valeurs entières de y ; et, dans ce cas, la transformation qui nous occupe ici ne saurait présenter de difficulté.

19. En particulier, si cette série est nulle pour toutes les valeurs entières de y, les valeurs des coefficiens b', c', d',.... se réduiront à leur dernier terme. Tel est le cas de

$$\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}=1-\frac{\varpi^2y^2}{1.2.3}+\frac{\varpi^4y^4}{1.2.3.4.5}-\frac{\varpi^6y^6}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots;$$

on a alors

$$a'=1\;;\quad b'=-\frac{1}{1}\;,\quad c'=+\frac{1}{1.4}\;,\quad d'=-\frac{1}{1.4.9};\ldots.$$

et il en résulte

$$\frac{\text{Sin.}\varpi y}{\varpi y}=1-\frac{y^2}{1}+\frac{y^2}{1}\cdot\frac{y^2-1}{4}-\frac{y^2}{1}\cdot\frac{y^2-1}{4}\cdot\frac{y^2-4}{9}+\ldots;$$

série qui est ce que devient la série générale (6), dans le cas de $h=1$; elle sera donc égale au produit infini

$$\left(1-\frac{y^2}{1}\right)\left(1-\frac{y^2}{4}\right)\left(1-\frac{y^2}{9}\right)\left(1-\frac{y^2}{16}\right)\ldots.$$

20. Appliquons encore nos règles générales à la décomposition en facteurs de la série

$$\text{Cos.}\varpi y=1-\frac{\varpi^2y^2}{1.2}+\frac{\varpi^4y^4}{1.2.3.4}-\frac{\varpi^6y^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots;$$

au cas que cette décomposition soit possible. On aura ici $\text{F}0=+1$ et il en sera de même de toutes les fonctions paires $\text{F}2$, $\text{F}4$,....; tandis qu'au contraire les fonctions impaires $\text{F}1$, $\text{F}3$, $\text{F}5$,.... seront égales $a-1$. On trouvera, d'après cela

$$a'=1,\;b'=-\frac{2}{1},\;c'=+\frac{4}{1.2.1.3},\;d'=-\frac{8}{1.2.3.1.3.5},\;e'=+\frac{16}{1.2.3.4.1.3.5.7},\ldots$$

Comparant ces valeurs (6) aux coefficiens

$$1\;,\quad\frac{1}{h}\;,\quad\frac{1}{1.2h(h+1)}\;,\quad\frac{1}{1.2.3h(h+1)(h+2)}\;,\ldots.,$$

on verra qu'elles coïncident, dans la supposition de $h=\frac{1}{2}$. La série proposée sera donc égale au produit infini

$$\left(1-\frac{4y^2}{1}\right)\left(1-\frac{4y^2}{9}\right)\left(1-\frac{4y^2}{25}\right)\left(1-\frac{4y^2}{49}\right)\ldots.$$

20. La dernière application que nous venons de faire de notre méthode laisse suffisamment apercevoir le caractère distinctif des séries de la forme

$$a+by^2+cy^4+dy^6+ey^8+fy^{10}+\ldots,$$

décomposables en un produit infini, tel que

$$\left\{1-\frac{y^2}{h^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+3)^2}\right\}\ldots\ldots$$

On voit en effet que les coefficiens a, b, c, ... étant donnés, il faut d'abord calculer, par leur moyen, les coefficiens a', b', c',..., de la série

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)\ldots;$$

et tant que, par une détermination convenable de h, on pourra faire coïncider avec eux les coefficiens généraux

$$1\,,\quad -\frac{1}{h}\,,\quad +\frac{1}{1.2h(h+1)}\,,\quad -\frac{1}{1.2.3h(h+1)(h+2)},\ldots$$

on sera certain que la décomposition est possible, et on connaîtra tout ce qui est nécessaire pour l'effectuer.

21. Mais il importe de remarquer qu'il y a une infinité de cas où la décomposition est très-possible, sans que sa possibilité se manifeste par les caractères que nous venons d'indiquer. Cela a lieu, lorsque la série proposée est le produit de deux ou d'un plus grand nombre de produits infinis de la forme

$$\left\{1-\frac{1}{h}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+2)^2}\right\}\left\{1-\frac{y^2}{(h+3)^2}\right\}\ldots\ldots$$

dans lesquels la valeur de h varie, d'un produit à l'autre. Pour frayer le chemin qui conduit à cette recherche, vraiment intéressante, proposons-nous le problème qui suit;

22. Essayons de multiplier entre elles les deux séries

$$a+by^2+cy^2(y^2-1)+dy^2(y^2-1)(y^2-4)+ey^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots,$$

$$a'+b'y^2+c'y^2(y^2-1)+d'y^2(y^2-1)(y^2-4)+e'y^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots;$$

il est toujours possible (8) de réduire leur produit à la forme de chacune d'elles; en représentant donc ce produit par

$$A+By^2+Cy^2(y^2-1)+Dy^2(y^2-1)(y^2-4)+Ey^2(y^2-1)(y^2-4)(y^2-9)+\ldots;$$

les suppositions particulières de $y=0$, 1, 2, 3, 4,...., donneront

$$A=aa',$$
$$B=ab'+a'b+bb',$$
$$C=ac'+bb'+a'c+4bc'+4b'c+12cc';$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La suite nous fournira l'occasion de continuer ces valeurs à volonté.

23. Appliquons ces résultats généraux au cas des séries qui résultent du développement des deux expressions

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}, \quad \frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}.$$

On a

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=1-\frac{y^2}{h}+\frac{y^2(y^2-1)}{2h(h+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3h(h+1)(h+2)}+\ldots;$$

$$\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}=1-\frac{y^2}{m}+\frac{y^2(y-1)}{2m(m+1)}-\frac{y^2(y^2-1)(y^2-4)}{2.3m(m+1)(m+2)}+\ldots;$$

Il sera possible de donner au produit de ces deux séries la forme

$$1-Ay^2+By^2(y^2-1)-Cy^2(y^2-1)(y^2-4)+\ldots;$$

et les coefficiens A, B, C,.... auront la forme, très-remarquable que voici :

$$A=\frac{h+m-1}{hm},$$

$$B=\frac{(h+m-1)(h+m)}{2h(h+1)m(m+1)},$$

$$C=\frac{(h+m-1)(h+m)(h+m+1)}{2.3h(h+1)(h+2)m(m+1)(m+2)};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

24. Le théorème que nous venons d'exposer est très-vrai, en général. Toutefois nous ne saurions dissimuler qu'en l'appliquant à certains cas particuliers, qui paraissent en faire une exception formelle, on s'exposerait à une suite de conclusions extrêmement paradoxales. Supposons d'abord $h+m=1$; cette supposition rend nuls tous les coefficiens A, B, C,...., et paraît conséquemment réduire à l'unité le produit

$$\frac{(h-y)^{y|1}.(m-y)^{y|1}}{h^{y|1}m^{y|1}},$$

toutes les fois que $h+m=1$, ce qui permettrait de remplacer m par $1-h$. Cela est très-vrai, tant que h est un nombre entier. On a alors

$$(h-y)^{y|1}=(h-y)(h-y+1)\ldots\ldots\ldots(h-1)\ ,$$
$$h^{y|1}=h(h+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(h+y-1)\ ,$$
$$(m-y)^{y|1}=(-h-y+1)(-h-y+2)\ldots(-h)\ ,$$
$$m^{y|1}=(-h+1)(-h+2)\ldots\ldots(-h+y)\ ;$$

et il est très-clair qu'en divisant le premier produit par le second et le quatrième par le troisième, les deux quotiens seront identiquement les mêmes. Mais sera-t-il permis d'étendre ce théorème, très-évident pour des nombres entiers, à des valeurs fractionnaires de h et de m ? Supposons l'un et l'autre égaux à *un demi*, on aura

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}=\text{Cos.}\,\pi y\ ,$$

d'où il résulterait que le quarré du cosinus de tout angle quelconque, et par conséquent ce cosinus lui-même est égal à l'unité.

25. Supposons, en second lieu, $h=1$, $m=1$, nous aurons

$$\frac{(h-y)^{y|1}}{h^{y|1}}=\frac{(m-y)^{y|1}}{m^{y|1}}=\frac{\text{Sin.}\,\pi y}{\pi y}\ ;$$

ainsi la formule, appliquée à ce cas particulier, devrait donner pour produit $\frac{\text{Sin.}^2\pi y}{\pi^2 y^2}$. Cependant, comme dans ce même cas, on a $h+m-1=1$, les coefficiens A, B, C, D,.... deviennent respectivement 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$,...., la série qui doit représenter le produit devient identique avec celle qui exprimerait chacun des facteurs. On aurait donc ainsi $\text{Sin.}\,\pi y=\pi y$; proposition qui n'est admissible que dans le cas d'un angle infiniment petit, et qui est étroitement liée avec celle du n.° précédent $\text{Cos.}\,\pi y=1$.

26. Ces conclusions paradoxales n'ôtent rien à la vérité, et même à la généralité du théorème. Il faudra apprendre la manière de s'en servir, et sur-tout distinguer les cas dans lesquels il présentera les restrictions que les conditions particulières du problème rendent indispensablement nécessaires. En laissant à nos lecteurs le soin provisoire de déchiffrer ces énigmes, nous devons prévenir qu'elles

seront l'objet du mémoire suivant, et que nous espérons d'en donner une solution satisfaisante et complète.

FONCTIONS CIRCULAIRES.

Développemens, en séries, des sinus et cosinus suivant l'arc, et de l'arc suivant sa tangente;

Par M. GERGONNE.

I. Le sinus d'un arc variant de signe avec cet arc, sans varier de grandeur absolue; on est autorisé à supposer

$$\text{Sin}.x=Ax+Bx^3+Cx^5+Dx^7+\ldots\ldots; \qquad (1)$$

et conséquemment

$$\text{Sin}.y=Ay+By^3+Cy^5+Dy^7+\ldots\ldots; \qquad (2)$$

$$\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y)=A[\tfrac{1}{2}(x-y)]+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^3+\ldots \qquad (3)$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$\text{Sin}.x-\text{Sin}.y=2\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y),$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$, et, en exécutant la division, il viendra

$$\{A+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^2+C[\tfrac{1}{2}(x-y)]^4+\ldots\}\text{Cos}.\tfrac{1}{2}(x+y)=$$
$$A+B(x^2+xy+y^2)+C(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)+\ldots.$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $y=x$, elle se réduira à

$$A\text{Cos}.x=A+3Bx^2+5Cx^4+7Dx^6+\ldots\ldots; \qquad (4)$$

on aura donc aussi

$$A\text{Cos}.y=A+3By^2+5Cy^4+7Dy^6+\ldots\ldots \qquad (5)$$

substituant les valeurs de Cos.x et Cos.y, données par ces deux équations, ainsi que celle de Sin.$\frac{1}{2}(x-y)$, donnée par l'équation (3), dans l'équation

$$\text{Cos}.y-\text{Cos}.x=2\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Sin}.\tfrac{1}{2}(x-y),$$

les deux membres de l'équation résultante seront divisibles par $\frac{1}{2}(x-y)$, et, en exécutant la division, il viendra

$$A\{A+B[\tfrac{1}{2}(x-y)]^2+C[\tfrac{1}{2}(x-y)]^4+\ldots\}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)=$$
$$-3B(x+y)-5C(x^3+x^2y+xy^2+y^3)-\ldots\ldots$$

Si, dans cette dernière équation, on fait $y=x$, elle deviendra

$$A^2\text{Sin.}x=-2.3Bx-4.5Cx^3-6.7Dx^5-\ldots\ldots;$$

mais l'équation (1) donne

$$A^2\text{Sin.}x=A^3x+A^2Bx^3+A^2Cx^5+\ldots\ldots;$$

on aura donc

$$-2.3B=A^3\ ,\quad -4.5C=A^2B\ ,\quad -6.7D=A^2C\ ,\ldots$$

et par conséquent

$$B=-\frac{A^3}{1.2.3}\ ,\quad C=+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}\ ,\quad D=-\frac{A^7}{1.2.3.4.5.6.7}\ ,\ldots\ldots;$$

donc enfin (1 et 4)

$$\text{Sin.}x=\frac{Ax}{1}-\frac{A^3x^3}{1.2.3}+\frac{A^5x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{A^7x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots.$$
$$\text{Cos.}x=1-\frac{A^2x^2}{1.2}+\frac{A^4x^4}{1.2.3.4}-\frac{A^6x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots.$$

Il est d'ailleurs facile de prouver que la constante A doit être égale à l'unité. (*)

II. La tangente d'un arc variant aussi de signe avec cet arc, sans varier de grandeur absolue; on est autorisé à supposer

$$x=A\text{Tang.}x+B\text{Tang.}^3x+C\text{Tang.}^5x+\ldots\ldots; \qquad (6)$$

on aura donc aussi

$$y=A\text{Tang.}y+B\text{Tang.}^3y+C\text{Tang.}^5y+\ldots.; \qquad (7)$$
$$x-y=A\text{Tang.}(x-y)+B\text{Tang.}^3(x-y)+\ldots. \qquad (8)$$

Si l'on égale la valeur de $x-y$ donnée par les équations (6 et 7) à celle que donne l'équation (8), en mettant en évidence le facteur Tang.x—Tang.y, qui affecte l'un des membres de l'équation résultante, il viendra

$$(\text{Tang.}x-\text{Tang.}y)\{A+B(\text{Tang.}^2x+\text{Tang.}x\text{Tang.}y+\text{Tang.}^2y)+\ldots\}$$
$$=\text{Tang}(x-y)\{A+B\text{Tang.}^2(x-y)+C\text{Tang.}^4(x-y)+\ldots.\};$$

mais on a

(*) Voyez la *Théorie des fonctions analitiques.*

$$\text{Tang.}x-\text{Tang.}y=(1+\text{Tang.}x\,\text{Tang.}y)\text{Tang.}(x-y)\ ,$$

substituant donc, et supprimant le facteur commun $\text{Tang.}(x-y)$, on aura

$$(1+\text{Tang.}x\,\text{Tang.}y)\{A+B(\text{Tang.}^2x+\text{Tang.}x\,\text{Tang.}y+\text{Tang.}^2y)+\ldots\}$$
$$=A+B\text{Tang.}^2(x-y)+C\text{Tang.}^4(x-y)+\ldots\ ;$$

posant alors $y=x$, cette équation deviendra simplement

$$A=(1+\text{Tang.}^2x)\{A+3B\text{Tang.}^2x+5C\text{Tang.}^4x+\ldots\}\ ;$$

ou, en développant,

$$A=\left.\begin{array}{r}A+3B\\+A\end{array}\right|\text{Tang.}^2x+\left.\begin{array}{r}5C\\+3B\end{array}\right|\text{Tang.}^4x+\left.\begin{array}{r}7D\\+5C\end{array}\right|\text{Tang.}^6x+\ldots;$$

donc

$$3B+A=0\ ,\quad 5C+3B=0\ ,\quad 7D+5C=0,\ldots;$$

d'où

$$B=-\tfrac{1}{3}A\ ,\quad C=+\tfrac{1}{5}A\ ,\quad D=-\tfrac{1}{7}A,\ldots;$$

donc enfin (6)

$$x=A(\text{Tang.}x-\tfrac{1}{3}\text{Tang.}^3x+\tfrac{1}{5}\text{Tang.}^5x-\ldots);$$

on parviendra d'ailleurs facilement à s'assurer que la constante A doit être égale à l'unité.

GÉOMÉTRIE.

Recherche de la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle ;

Par M. Garnier, docteur ès sciences, ancien professeur à l'école polytechnique.



Au Rédacteur des *Annales*,

Monsieur,

La lecture de vos *Annales* me laisse le regret de n'avoir pas connu plutôt cet intéressant recueil ; il m'aurait servi à améliorer

quelques théories de la première section de mon algèbre ; mais enfin je l'exploite au profit, tant de la seconde que de l'*Application de l'algèbre à la géométrie*, et des réciproques, ouvrage dont je prépare de nouvelles éditions ; ainsi, Monsieur, vous voyez que je serai de beaucoup votre débiteur.

Je ne sais trop, Monsieur, si vous consentirez à revenir sur une question déjà traitée dans le tome 1.er de votre recueil (pages 149 - 158). Il s'agit de l'expression de la distance entre les centres des cercles inscrit et circonscrit à un même triangle. Il me semble que le procédé que j'ai l'honneur de vous adresser se recommande, par sa simplicité.

Soient A, B, C les trois angles du triangle proposé ; soient respectivement r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit ; soit enfin D la distance entre les centres de ces cercles.

En considérant D comme l'un des côtés d'un triangle dont le sommet est en A, observant que les deux autres côtés de ce triangle sont R et $\frac{r}{\text{Sin.}\frac{1}{2}A}$, et que l'angle compris est $\frac{1}{2}(B-C)$ ou $\frac{1}{2}(C-B)$; on trouvera, par l'équation fondamentale de la trigonométrie rectiligne,

$$2rR\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=r^2+(R^2-D^2)\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A.$$

En transportant le sommet de ce triangle de A en B, on aura semblablement

$$2rR\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=r^2+(R^2-D^2)\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B.$$

Retranchant cette dernière équation de la première, il viendra

$$2rR\{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B\}$$
$$=(R^2-D^2)(\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B) ;$$

or,

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(B-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A-\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-C)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C$$
$$=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)$$
$$=\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}A-\text{Sin.}^2\tfrac{1}{2}B ;$$

on a donc, simplement

$$2rR=R^2-D^2 ,$$

ou

$$D=\sqrt{R^2-2rR} .$$

Paris, le 16 novembre 1812.

TRIGONOMÉTRIE.

Démonstration de quelques formules de trigonométrie rectiligne et de trigonométrie sphérique ;

Par M. Gergonne.



§. I.

Soient désignés par a, b, c les trois côtés d'un triangle, soit rectiligne soit sphérique, et par A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés.

S'il s'agit d'un triangle rectiligne, on aura

$$2bc\text{Cos.}A=b^2+c^2-a^2 ,$$
$$2ac\text{Cos.}B=a^2+c^2-b^2 .$$

Si l'on prend successivement la somme et la différence de ces deux équations, il viendra en réduisant

$$a\text{Cos.}B+b\text{Cos.}A=c ,$$
$$c(a\text{Cos.}B-b\text{Cos.}A)=a^2-b^2 .$$

Multipliant ces deux derniers, membre à membre, et réduisant encore, on aura, en transposant,

$$b^2(1-\text{Cos.}^2A)=a^2(1-\text{Cos.}^2B) ,$$

ou
$$b^2\text{Sin.}^2A=a^2\text{Sin.}^2B ,$$

ou enfin
$$b\text{Sin.}A=a\text{Sin.}B.$$

S'il s'agit d'un triangle sphérique on aura

$$\text{Sin.}b\text{Sin }c\text{Cos.}A=\text{Cos.}a-\text{Cos.}b\text{Cos.}c ,$$
$$\text{Sin.}a\text{Sin.}c\text{Cos.}B=\text{Cos.}b-\text{Cos.}a\text{Cos.}c .$$

Prenant successivement la somme et la différence de ces équations, il viendra

Sin.

$$\text{Sin.}c(\text{Sin.}a\text{Cos.}B+\text{Sin.}b\text{Cos.}A)=(1-\text{Cos.}c)(\text{Cos.}b+\text{Cos.}a)\ ,$$

$$\text{Sin.}c(\text{Sin.}a\text{Cos.}B-\text{Sin.}b\text{Cos.}A)=(1+\text{Cos.}c)(\text{Cos.}b-\text{Cos.}a)\ .$$

Multipliant ces deux dernières équations, membre à membre, en observant que $(1-\text{Cos.}c)(1+\text{Cos.}c)=1-\text{Cos.}^2c=\text{Sin.}^2c$, et divisant par Sin.^2c, on aura

$$\text{Sin.}^2a\text{Cos.}^2B-\text{Sin.}^2b\text{Cos.}^2A=\text{Cos.}^2b-\text{Cos.}^2a=\text{Sin.}^2a-\text{Sin.}^2b\ ,$$

ou, en transposant,

$$\text{Sin.}^2b(1-\text{Cos.}^2A)=\text{Sin.}^2a(1-\text{Cos.}^2B)\ ,$$

ou

$$\text{Sin.}^2b\text{Sin.}^2A=\text{Sin.}^2a\text{Sin.}^2B\ ,$$

ou enfin

$$\text{Sin.}b\text{Sin.}A=\text{Sin.}a\text{Sin.}B.$$

Cette manière de déduire des équations fondamentales la proportionnalité des sinus des angles aux côtés opposés, dans le triangle rectiligne, et aux sinus de ces côtés, dans le triangle sphérique, me paraît remarquable par sa simplicité et son uniformité.

§. II.

Conservons les mêmes notations que ci-dessus, et soit posé, en outre,

$$a+b+c=2s.$$

Dans le triangle rectiligne, on a, sans aucune ambiguïté de signes,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ,\qquad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\ ;$$

On déduit de là

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\pm\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{(s-b)\pm(s-a)}{c}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\mp\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{s\mp(s-c)}{c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\ ,$$

c'est-à-dire,

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{(s-b)\pm(s-a)}{c}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,\ \text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{s\mp(s-c)}{c}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ;$$

prenant successivement les signes supérieurs et les signes inférieurs, en ayant égard à la valeur de s, et réduisant, il viendra

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a+b}{c}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C\ .$$

Ces formules sont, pour les triangles rectilignes, ce que sont, pour les triangles sphériques, les formules de MM. Gauss et Delambre, démontrés par M. Servois, à la page 84 du second volume de ce recueil.

En divisant successivement la première par la seconde, la troisième par la quatrième, la première par la troisième, et la seconde par la quatrième, il vient

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C\ ,$$

$$a-b=\frac{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)}c\ ,$$

$$a+b=\frac{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}c\ .$$

Ces dernières formules sont exactement, pour les triangles rectilignes, ce que sont les *Analogies* de Néper pour les triangles sphériques.

Dans le triangle sphérique, on a, sans aucune ambiguïté de signes;

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin.}(s-b)\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\ ,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}b\text{Sin.}c}}\ ,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{Sin.}(s-c)\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}c\text{Sin.}a}}\ ,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-b)}{\text{Sin.}c\text{Sin.}a}}\ ;$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}}\ ,\quad \text{Cos.}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}}\ .$$

On déduit de là

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\pm\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{\text{Sin.}(s-b)\pm\text{Sin.}(s-a)}{\text{Sin.}c}\sqrt{\frac{\text{Sin.}s\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}}$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\text{Cos.}\tfrac{1}{2}A\text{Cos.}\tfrac{1}{2}B\mp\text{Sin.}\tfrac{1}{2}A\text{Sin.}\tfrac{1}{2}B=\frac{\text{Sin.}s\mp\text{Sin.}(s-c)}{\text{Sin.}c}\sqrt{\frac{\text{Sin.}(s-a)\text{Sin.}(s-b)}{\text{Sin.}a\text{Sin.}b}},$$

ou bien $\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\dfrac{\text{Sin.}(s-b)\pm\text{Sin.}(s-a)}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C,$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A\pm B)=\frac{\text{Sin.}s\mp\text{Sin.}(s-c)}{2\text{Sin.}\frac{1}{2}c\text{Cos.}\frac{1}{2}c}\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.$$

En prenant successivement les signes supérieurs et les signes inférieurs, se rappelant qu'en général

$$\text{Sin.}x+\text{Sin.}y=2\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x+y)\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y),$$
$$\text{Sin.}x-\text{Sin.}y=2\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(x-y)\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(x-y).$$

et faisant attention à la valeur de s, il viendra

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{Sin.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}.\text{Cos.}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}c}.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{Cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}c}.\text{Sin.}\tfrac{1}{2}C.$$

Ces formules sont celles de MM. Gauss et Délambre; dont il a été question ci-dessus.

En divisant successivement la première par la troisième, la seconde par la quatrième, la quatrième par la troisième, et enfin la seconde par la première, il vient

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(a+b)}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(a+b)}\text{Cot.}\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a+b)=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}(A+B)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c;$$

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{Sin.}\frac{1}{2}(A+B)}\text{Tang.}\tfrac{1}{2}c.$$

Cette manière de parvenir aux *Analogies* de Néper, outre son extrême brièveté, a donc encore l'avantage de donner, chemin faisant, d'autres formules utiles.

Au moyen de ce qui précède, et de ce qu'on sait d'ailleurs, la trigonométrie analitique, tant rectiligne que sphérique, me paraît pouvoir être réduite au plus haut degré de simplicité et de symétrie.

QUESTIONS PROPOSÉES.

Problèmes de Géométrie.

On peut appeler *Angles polyèdres équivalens* ceux qui contiennent un même nombre de fois un certain angle polyèdre, pris arbitrairement pour unité ; ou, ce qui revient au même, ceux qui, ayant leurs sommets au centre d'une même sphère, interceptent sur la surface de cette sphère des polygones sphériques équivalens. On peut en dire autant des *Angles coniques*, considérés comme angles polyèdres d'une infinité de faces ; le cône pouvant être d'ailleurs d'une nature quelconque. Ces angles coniques, sous le rapport des portions de surface sphérique qu'ils interceptent, peuvent donc être comparés, soit entre eux, soit aux autres angles polyèdres.

Ces considérations conduisent au problème suivant : *Quel est le lieu des sommets de tous les cônes droits et obliques qui, ayant pour base commune un même cercle donné, ont leur angle conique du sommet équivalent à un angle polyèdre donné* ?

Au lieu de demander que les angles coniques au sommet soient équivalens à un angle polyèdre donné; on pourrait demander que l'angle plan formé par le développement de chaque surface conique, fût égal à un angle plan donné ?

On pourrait aussi étendre ces recherches à des pyramides ou à des cônes de toute nature, ayant pour base commune un polygone ou une courbe fermée quelconque ?

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Essai sur la théorie des parallèles;

Par M. Gergonne.



On trouvera peut-être qu'il y a une sorte de témérité à revenir de nouveau sur un sujet où ont échoué, depuis Euclide, tant d'illustres géomètres. Aussi, quoique je fasse usage, depuis plus de huit ans, de la théorie que je vais développer, je n'aurais jamais songé à la rendre publique, si je n'y avais été fortement encouragé, en apprenant de mon estimable ami, M. Servois, qu'il était parvenu depuis long-temps, de son côté, à une théorie toute pareille. Sans prétendre d'ailleurs que cette théorie soit absolument inattaquable, elle me paraît du moins incomparablement plus courte et plus simple, et tout aussi rigoureuse, que tout ce qu'on a publié jusqu'ici sur ce sujet.

1. *LEMME CONNU. Par un point donné sur un plan, on peut toujours mener une perpendiculaire à une droite tracée sur ce plan, et on ne lui en peut mener qu'une seule.*

2. *DÉFINITION. Deux droites tracées sur un même plan sont dites parallèles, lorsqu'elles ne peuvent se rencontrer, quelque loin et dans quelque sens qu'on les suppose prolongées.*

3. *Corollaire.* Donc (1) deux perpendiculaires à une même droite, dans un même plan, sont deux droites parallèles.

4. *THÉORÈME. Par un point donné, on peut toujours mener une parallèle à une droite donnée, et on ne lui en peut mener qu'une seule.*

Soient AB une droite et C un point donnés (fig. 1); il s'agit de

prouver que, par le point C, on peut toujours mener une parallèle à la droite AB, et qu'on ne lui en peut mener qu'une seule.

Démonstration. Par le point C, on peut toujours (1) abaisser une perpendiculaire CD sur AB, et on ne lui en peut abaisser qu'une seule. De même, par ce point C, on peut toujours (1) mener à CD une perpendiculaire EF, et on ne lui en peut mener qu'une seule; et cette droite sera (3) parallèle à AB. Donc, 1.° par le point C on peut mener, au moins, une parallèle à AB.

Reste donc à prouver que, par ce même point C, on ne saurait mener aucune autre parallèle à AB.

Admettons que, par ce point C, on puisse faire passer d'autres parallèles à AB, différentes de EF; ces parallèles devront tomber dans l'un ou l'autre des deux angles droits DCE, DCF. Supposons que ce soit dans le dernier; on peut, par le point C, mener, dans cet angle, une infinité de droites qui rencontrent DB; et il est de plus évident que, si une droite passant par C rencontre DB, toute autre droite, passant par C, et faisant avec CD un angle moindre que celui que fera la première avec la même droite, rencontrera DB à plus forte raison, et même en un point plus voisin de D.

On voit par là que, parmi les diverses droites conduites par C, dans l'angle DCF, celles qui rencontrent DB et celles qui ne la rencontrent pas ne sauraient se succéder alternativement, mais doivent être séparées les unes des autres, les premières étant limitées par CD, et les dernières par CF.

De toutes les droites qui, passant par C, rencontrent DB, soit donc CG celle qui fait le plus grand angle aigu avec CD. On peut toujours concevoir DB prolongée vers B, au-delà du point où cette droite est rencontrée par CG; et si, par l'un quelconque des points du prolongement et par le point C, on mène une droite, cette droite devra passer entre les côtés de l'angle GCF; en admettant donc que CH fût cette droite, attendu qu'elle est supposée rencontrer DB, on devrait avoir, d'après l'hypothèse, Ang.DCH$<$Ang.DCG, ce qui est absurde. Donc, 2.° toute droite, autre que EF, passant

par C ne saurait être parallèle à AB; et conséquemment, on ne peut faire passer par ce point qu'une seule parallèle à cette droite.

M. Legendre qui, dans le temps, a eu la bonté d'examiner cette théorie, y a opposé l'objection que voici :

« Si la distance du point D à laquelle vous supposez que CG » rencontre DB est finie, votre raisonnement est exact; mais, si » cette distance est infinie, comme on peut très-bien le supposer, » alors il n'y a plus rien à conclure. C'est la faute que j'ai commise » moi-même, dans la première édition de mon ouvrage, et que je » n'ai pas réussi depuis à corriger complètement par la seule » synthèse. »

Mais, de quelque poids que puisse être, en ces matières, l'opinion de M. Legendre qui, comme on le voit, se juge lui-même assez sévèrement, il me paraît que son objection n'est pas tout-à-fait sans réplique; et qu'elle a uniquement sa source dans l'habitude où nous sommes tous d'attacher une idée positive au mot *infini*.

Lorsqu'on dit de deux droites qu'elles se rencontrent à une distance infinie, ou l'on veut dire qu'elles se rencontrent en effet, ou bien l'on veut exprimer qu'elles ne se rencontrent pas; il ne saurait y avoir ici de milieu. Or, j'ai supposé que CG rencontrait *effectivement* DB; et, quelque nom qu'on veuille donner d'ailleurs à l'intervalle entre le point D et celui où cette rencontre a lieu, comme on ne saurait se refuser à admettre qu'une droite peut être prolongée au-delà de l'un quelconque de ses points, il me paraît que, dans tous les cas, la conclusion conserve toute sa force.

Le tour de raisonnement que j'emploie ici n'est, au surplus, que celui dont M. Legendre fait lui-même usage, pour prouver qu'une ligne convexe est moindre que toute ligne qui, l'enveloppant extérieurement, se termine aux mêmes extrémités; et qu'une surface convexe est moindre que toute surface qui, l'enveloppant extérieurement, se termine au même contour.

Je terminerai par montrer comment, en adoptant la définition

de l'angle donnée par feu Bertrand de Genève, on peut parvenir directement, et d'une manière fort simple, au théorème de l'égalité de la somme des trois angles de tout triangle à deux angles droits.

Les côtés d'un triangle, considérés comme droites indéfinies, divisent toujours le plan, aussi indéfini, sur lequel ce triangle se trouve situé, en sept régions (fig. 2) : savoir, une région finie T, qui est le triangle lui-même ; trois régions infinies A, B, C qui, étant les opposés par le sommet des angles de ce triangle, doivent avoir leur somme égale à la somme de ces angles ; enfin trois autres régions A′, B′, C′, aussi infinies, et respectivement égales aux précédentes, diminuées chacune de l'aire T du triangle.

Or, comme ces sept régions réunies composent le plan, ou quatre angles droits, il s'ensuit qu'en désignant par D l'angle droit, considéré comme surface infinie, on doit avoir

$$A+B+C+A'+B'+C'+T=4D\ ;$$

mais, on a d'ailleurs

$$A=A'+T\ ,\quad B=B'+T\ ,\quad C=C'+T\ ;$$

prenant donc la somme de ces quatre équations, il viendra, en réduisant et divisant par 2D

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=2+\frac{T}{D}\ ;$$

ou simplement

$$\frac{A}{D}+\frac{B}{D}+\frac{C}{D}=2\ ;$$

puisque la fraction $\frac{T}{D}$, ayant son numérateur fini et son dénominateur infini, doit être regardée comme nulle vis-à-vis du nombre 2 : ainsi, la somme des nombres abstraits qui expriment combien de fois les angles d'un triangle contiennent l'angle droit, vaut deux unités. (*)

(*) La même méthode, appliquée à la sphère, donne l'aire connue du triangle sphérique. Appliquée au tétraèdre, elle conduit aux relations connues entre ses angles dièdres et ses angles trièdres, et prouve, en outre, que l'espace infini compris entre les prolongemens des faces au-delà d'une arête quelconque, est équivalent à l'espace infini compris entre les prolongemens des mêmes faces au-delà de l'arête opposée.

STATIQUE APPLIQUÉE.

De l'équilibre dans l'échelle à incendie, et d'une nouvelle machine, propre à mouvoir les fardeaux;

Par M. Bérard, principal et professeur de mathématiques au collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes.



On a proposé, il y a quelques années, pour retirer des maisons embrasées les personnes qui y sont enfermées, une échelle très-ingénieuse. Elle présente des cas d'équilibre assez remarquables que je me propose ici de discuter.

La figure 1.re représente l'assemblage de plusieurs rhombes contigus : il faut imaginer un second système, parallèle à celui-là et lié avec lui par des axes fixés d'une part aux points O, O′, O″,..., et de l'autre à leurs correspondans dans le second système. Les côtés de tous les rhombes sont assemblés à charnières; et l'ensemble des deux systèmes forme une sorte d'échelle qui peut se plier ou s'allonger subitement, lorsqu'on fait varier l'angle des côtés du premier rhombe inférieur (*). La machine, placée verticalement, repose sur quatre roulettes A, A′,...., destinées à faciliter son transport et le jeu des mouvemens angulaires des rhombes. Enfin, à la partie supé-

(*) Chaque système de rhombes ressemble exactement à ces pincettes en acier dont se servent quelques fumeurs, pour retirer des charbons du feu, sans se brûler les doigts; ou encore au système de traverses en bois sur lesquelles sont établis des petits soldats, dans certains joujoux d'enfans.

J. D. G.

rieure se trouve étendue une toile DMD′, destinée à recevoir la personne qu'on veut descendre.

Cela posé, concevons que la machine doive être mise en jeu par deux forces égales et opposées Q, appliquées en A et A′, destinées à faire varier l'angle AOA′. Soit P le poids de la machine, que je suppose agir au milieu de la hauteur HR (quoique, pour plus grande solidité, il soit convenable de faire décroître, de bas en haut, l'épaisseur des côtés des rhombes). Soit M le poids de la personne placée en M, sur la toile. Il s'agit de trouver l'équation d'équilibre, entre les forces M, P, Q.

Le principe de la décomposition des forces serait ici d'une application difficile, ou tout au moins fort longue : celui des vitesses virtuelles vaudrait mieux ; mais le plus simple est, dans le cas présent, celui en vertu duquel le centre commun de gravité de plusieurs poids en équilibre doit être tellement situé qu'il ne puisse plus descendre.

Pour employer ce dernier principe, il faut remplacer, par la pensée, les deux forces horizontales Q, qui agissent en A et A′, par un poids vertical $2Q$, suspendu à deux cordons AHQ, A′HQ, qui passeraient sur une poulie H.

Si l'on prend, à l'égard de l'axe fixe AA′, les momens des poids M, P, et qu'ayant retranché celui du poids $2Q$, on divise le reste par $M+P+2Q$, on aura la distance de cette ligne AA′ au centre commun de gravité des trois poids ; distance qui, dans le cas d'équilibre, devra être un *minimum*. Mais, comme la somme des poids est constante, il suffira d'écrire que la différence des momens ci-dessus est un *minimum*.

Soient $AH=x$; l'angle $HAO=z$, le côté AO de l'un des rhombes $=a$; le nombre des centres ou axes O, O′, O″, ... $=n$; la longueur DM de la demi-corde $=c$; enfin la longueur de la corde $AHQ=b$. Cette longueur est arbitraire, et doit disparaître du calcul.

On aura $AH=a\text{Cos}.z$; $HO=a\text{Sin}.z$; $HR=2na\text{Sin}.z$; $MR=\sqrt{c^2-a^2\text{Cos}.^2z}$; $HM=2na\text{Sin}.z-\sqrt{c^2-a^2\text{Cos}.^2z}$; et $HQ=b-a\text{Cos}.z$.

On aura donc, d'après cela, 1.° pour le moment du poids M,

$$2nMa\text{Sin.}z - M\sqrt{c^2 - a^2\text{Cos.}^2z} \;;$$

2.° pour le moment du poids P,

$$nPa\text{Sin.}z \;;$$

3.° enfin, pour le moment du poids $2Q$,

$$2Q(b - a\text{Cos.}z).$$

Égalant donc à zéro la différentielle de la différence entre la somme des deux premiers momens et le troisième, on obtiendra, pour l'équation d'équilibre cherchée,

$$\{n(2M+P)\text{Cos.}z - 2Q\text{Sin.}z\}\sqrt{c^2 - a^2\text{Cos.}^2z} - Ma\text{Sin.}z\text{Cos.}z = 0. \quad (1)$$

Cette équation fera connaître facilement la valeur de la force Q, pour une valeur déterminée de l'angle z. Il ne sera pas aussi aisé d'avoir z en fonction de Q.

Comme M est ordinairement très-petit à l'égard de P, si l'on fait $M=0$, on aura

$$nP = 2Q\text{Tang.}z. \qquad (2)$$

Cette équation sera rigoureuse, pour un moment quelconque de l'ascension, parce qu'alors le poids M ne chargera pas encore la machine.

Cette machine peut rester en équilibre, indépendamment de la force Q. On a l'équation qui convient à ce cas, en faisant $Q=0$ dans l'équation (1) ; il vient alors

$$a\text{Cos.}z = x = \sqrt{\frac{n^2(2M+P)^2c^2 - M^2a^2}{n^2(2M+P)^2 - M^2}}. \qquad (3)$$

Le dénominateur de la fraction sous le radical étant essentiellement positif, on voit que ce cas ne pourra avoir lieu qu'autant qu'on aura

$$c > \frac{Ma}{n(2M+P)} \;;$$

et comme, d'un autre côté, on doit toujours avoir $x<a$, d'où $c<a$; on voit que l'équilibre ne pourra avoir lieu qu'autant que c se trouvera compris entre certaines limites. Si, par exemple, on fait $P=0$ et $n=1$, la formule (3) donnera

$$x=\sqrt{\frac{4c^2-a^2}{3}};$$

d'où l'on voit qu'on doit avoir alors $2c>a$ et $2c<2a$.

Il résulte encore de ce qui précède que le poids M ne pourra parvenir à l'horizontale AA', ni même s'en approcher à un certain point, à moins que la force $2Q$ n'agisse dans un sens contraire à celui que nous lui avons supposé, et alors il faudra la faire négative dans (1) ; ainsi, elle devra être employée alternativement, tantôt de A vers H, et tantôt de H vers A.

Enfin, si l'on voulait avoir égard au frottement, on pourrait consulter ma *Statique des voûtes*, où j'ai donné le premier des formules rigoureuses et générales (Voyez aussi mes *Opuscules mathématiques*, problème 17).

On peut déduire de ce qui précède l'idée d'une machine propre à mouvoir les fardeaux. CQ, C'Q', C''Q'',.... (fig. 4) représentent plusieurs groupes, composés chacun de trois rhombes. Les extrémités C, C', C'' sont fixées et liées au sol. Le fardeau P qu'il s'agit de mouvoir est lié par un cordon au premier centre I du premier groupe; l'autre extrémité Q du premier groupe est liée au premier centre I' du second groupe, par un nouveau cordon; l'extrémité Q' du second groupe, est liée, de la même manière au premier centre I'' du troisième groupe; et ainsi de suite. Enfin la puissance est appliquée à l'extrémité Q'' du dernier groupe.

Il est aisé de voir que, la vitesse du poids P étant I, celles des points Q, Q', Q'',.... seront respectivement 3, 9, 27,...; ainsi, s'il y a seulement 4 groupes, de 3 rhombes chacun, la puissance sera à la résistance :: 1:81.

On pourrait former les groupes de plus ou de moins de 3 rhombes; mais je crois le système de 3 rhombes par groupe le plus avantageux.

Il laisse aux artistes à juger des circonstances où la machine que je viens de décrire, peut être utile.

GÉOMÉTRIE

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

Recherche des lignes et surfaces qui en touchent une infinité d'autres, se succédant suivant une loi uniforme;

Par M. GERGONNE.



La recherche des lignes et surfaces limites d'une infinité d'autres lignes et surfaces liées entre elles par une loi commune, soit par son étroite liaison avec la théorie des *solutions particulières*, soit par la multitude des applications dont elle est susceptible, peut être regardée comme un des objets les plus intéressans de la haute géométrie.

Cette recherche n'a été déduite jusqu'ici que de la considération des infiniment petits ou des limites, ou enfin de la théorie même des solutions particulières. Je vais faire voir comment, la *série de Taylor* une fois admise, on peut la ramener, sans la compliquer davantage, aux notions les plus simples et les plus lumineuses.

§. I.

Recherche de la ligne qui en touche une infinité d'autres, dont les équations ne diffèrent que par une constante.

Soit

$$\varphi(x,y,A)=V=0\ ;$$

l'équation commune à une infinité de courbes planes, rapportées aux mêmes axes, et ne différant entre elles que par la constante A; et proposons-nous de déterminer l'équation de la courbe à laquelle toutes celles-là sont tangentes.

Soit MM cette courbe cherchée (fig. 5), c'est-à-dire, la courbe enveloppante ; soit GG celle des courbes enveloppées qui répond à la valeur A, et soit T le point où elle touche MM ; soient, de plus, G'G' celle des courbes enveloppées qui répond à la valeur $A'=A+\alpha$, T' le point où elle touche MM, et P celui où elle coupe GG. On conçoit clairement que, plus α diminuera, et plus aussi le point P se rapprochera du point T, en suivant l'arc de courbe PT ; en sorte que ces deux points se réuniront en un seul, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul ; mais alors les deux courbes GG et G'G' se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

Équation de GG, $V=0$, (I)

Équation de G'G', $V+\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0$; (II)

équations qui rentrent, en effet, l'une dans l'autre, lorsqu'on suppose $\alpha=0$, et dont la combinaison, dans *le cas contraire*, fera connaître le point P.

Or, on sait que, lorsque deux courbes passent par un même point, toute courbe qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de ces deux courbes, passe aussi par ce point ; donc, en particulier, la différence entre les équations (I) et (II) est l'équation d'une courbe H'H' qui, comme G'G', coupe aussi GG au point P. Cette équation est

$$\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{dV}{dA}+\alpha\left\{\frac{d^2V}{dA^2}\frac{1}{1.2}+\ldots\right\}=0, \qquad \text{(III)}$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi, on pourra, pour la détermination du point P, substituer la combinaison des équations (I) et (III) à celle des équations (I) et (II).

Mais, à mesure que α décroîtra, le point P se rapprochant du

point T, la courbe H′H′, exprimée par l'équation (III), tendra continuellement à devenir une courbe HH coupant MM ou GG en T; on aura donc l'équation de HH, en faisant $a=0$, dans l'équation (III), ce qui la réduit simplement à $\frac{dV}{dA}=0$. Ainsi le point T de MM, qui répond à la valeur A de la constante, sera donné par le système des deux équations

$$V=0\,,\quad \frac{dV}{dA}=0\,;$$

si donc on élimine A entre elles, l'équation résultante, en x et y, devant être satisfaite par les coordonnées des points T, T′, T″,..., qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'',.... de la constante, sera l'équation de la courbe MM qui les contient tous, c'est-à-dire, de la courbe cherchée.

Si l'équation proposée était

$$\varphi(x\,,y\,,A_1\,,A_2\,,\ldots A_n)=V=0\,;$$

les constantes A_1, A_2,.... A_n étant liées par les équations suivantes

$$\begin{array}{l} f_1\,(A_1\,,A_2\,,\ldots A_n)=F_1\;=0\,, \\ f_2\,(A_1\,,A_2\,,\ldots A_n)=F_2\;=0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \\ f_{n-1}(A_1\,,A_2\,,\ldots A_n)=F_{n-1}=0\,; \end{array}$$

on pourrait, à l'aide de ces équations, éliminer de V toutes les constantes, excepté une seule, ce qui ramènerait la question au cas précédent.

On pourrait aussi considérer toutes les constantes comme des fonctions de l'une d'elles, A_1 par exemple; alors en differentiant sous ce point de vue, et eliminant

$$A_1\,,A_2\,,\ldots.A_n\,,\quad \frac{dA_2}{dA_1}\,,\quad \frac{dA_3}{dA_1}\,,\ldots\frac{dA_n}{dA_1}\,,$$

entre les équations

$$V=0\,,\ F_1=0\,,\ F_2=0\,,\ldots F_{n-1}=0\,,\ \frac{d(V)}{dA_1}=0\,,\ \frac{d(F_1)}{dA_1}=0\,,\ \frac{d(F_2)}{dA_1}=0\,,\ldots\ \frac{d(F_{n-1})}{dA_1}=0\,;$$

l'équation résultante en x et y serait l'équation cherchée.

Mais il sera peut-être plus élégant encore d'opérer comme il suit. On formera l'équation

$$\delta V+\lambda_1.\delta F_1+\lambda_2.\delta F_2+\ldots+\lambda_{n-1}.\delta F_{n-1}=0\ ;$$

en y égalant à zéro les coefficiens des variations

$$\delta A_1\ ,\quad \delta A_2\ ,\ldots\ldots \delta A_n\ ,$$

on obtiendra n équations entre lesquelles on éliminera les $n-1$ multiplicateurs arbitraires $\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ldots\ldots\lambda_{n-1}$; en supposant que $F_n=0$ soit l'équation résultante de l'élimination, il ne s'agira plus que d'éliminer

$$A_1\,,\ A_2\,,\ A_3\,,\ldots\ldots A_n\ ,$$

entre les équations

$$V=0\ ,\quad F_1=0\ ,\quad F_2=0\ ;\quad F_3=0\ ,\ldots\ldots F_n=0.$$

De ce qui précède se déduisent en particulier, d'une manière très-simple, la théorie des *développées* et celle des *caustiques*.

La théorie que je viens d'exposer m'a été présentée, il y a plus de six ans, à peu près telle que je la donne ici, par M. F. Journet, alors élève du lycée de Nismes (*), et actuellement ingénieur des ponts et chaussées. Je vais indiquer brièvement de quelle manière elle peut être étendue aux surfaces courbes.

§. II.

Recherche de la surface qui en touche une infinité d'autres, dont les équations ne diffèrent que par une constante.

Soit

$$\varphi(x\,,y\,,z\,,A)=V=0\ ,$$

(*) C'était, comme l'on voit, dans un temps, déjà bien loin de nous, où il y avait des cours publics de calcul différentiel, même dans les lycées de provinces ; et où l'on pensait que l'étude de la haute géométrie et de la mécanique, seule véritable introduction à celle des sciences physiques, devait, tout aussi bien que tant d'autres études, entrer dans le plan d'une éducation vraiment libérale.

l'équation commune à une infinité de surfaces courbes, rapportées aux mêmes axes, et ne différant entre elles que par la constante A; et proposons-nous de déterminer l'équation de la surface à laquelle toutes celles-là sont tangentes.

Soit MMM la surface cherchée (*), c'est-à-dire, la surface enveloppe; soit GGG celle des surfaces enveloppées qui répond à la valeur A, et soit TT la courbe suivant laquelle elle touche MMM; soient, de plus, G'G'G' celle des surfaces enveloppées qui répond à la valeur $A'=A+\alpha$, T'T' la courbe suivant laquelle elle touche MMM, et PP celle suivant laquelle elle coupe GGG. On conçoit clairement que plus α diminuera, et plus aussi la courbe PP se rapprochera de TT, en suivant la surface GGG; en sorte que ces deux courbes se réuniront en une seule, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul; mais alors les deux surfaces GGG et G'G'G' se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

Équation de GGG; $\quad V=0\,,\qquad$ (I)

Équation de G'G'G', $\quad V+\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,;\qquad$ (II)

équations qui rentrent, en effet, l'une dans l'autre, lorsqu'on suppose $\alpha=0$, et dont la combinaison, dans le cas contraire, fera connaître la courbe PP.

Or, on sait que, lorsque deux surfaces se coupent suivant une certaine courbe, toute surface qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de ces deux surfaces, passe aussi par cette courbe; donc, en particulier, la différence entre les équations (I) et (II) est l'équation d'une surface H'H'H' qui, comme G'G'G', coupe GGG suivant la courbe PP. Cette équation est

(*) Je sous-entends la figure, qu'il est plus aisé de concevoir que de représenter, sans confusion.

$$\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{dV}{dA}+\alpha\left\{\frac{d^2V}{dA^2}\frac{1}{1.2}+\ldots\right\}=0, \qquad \text{(III)}$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi, on pourra, pour la détermination de la courbe PP, substituer la combinaison des équations (I) et (III) à celle des équations (I) et (II).

Mais, à mesure que α décroîtra, la courbe PP se rapprochant de la courbe TT, la surface H′H′H′, exprimée par l'équation (III), tendra continuellement à devenir une surface HHH, coupant MMM ou GGG suivant TT; on aura donc l'équation de HHH, en faisant $\alpha=0$, dans l'équation (III), ce qui la réduit simplement à $\frac{dV}{dA}=0$. Ainsi, la courbe TT, tracée sur MMM, qui répond à la valeur A de la constante, sera donnée par le système des deux équations

$$V=0, \quad \frac{dV}{dA}=0;$$

si donc on élimine A entre elles, l'équation résultante, en x, y, z, devant être satisfaite par les coordonnées des courbes TT, T′T′, T″T″,.... qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'',.... de la constante, sera l'équation de la surface MMM qui les contient toutes, c'est-à-dire, de la surface cherchée.

Ces lignes TT, T′T′, T″T″,...., qui répondent aux diverses valeurs de la constante, sont ce qu'on appelle les *Caractéristiques de la surface limite*. Comme elles se succèdent suivant une loi uniforme, on peut demander de déterminer la courbe à laquelle elles sont toutes tangentes, et qui est dite l'*arête de rebroussement de la surface limite*. Voici par quelles considérations on obtiendra cette courbe.

Soit mm la courbe cherchée; soit gg celle des caractéristiques qui répond à la valeur A de la constante, cette caractéristique touchant mm au point t. Soit de plus $g'g'$ celle des caractéristiques qui repond

à la valeur $A'=A+\alpha$; soient t' le point où elle touche mm, et p celui où elle coupe gg. Plus α diminuera, et plus aussi le point p se rapprochera du point t, en suivant l'arc de courbe pt; en sorte que ces deux points se réuniront en un seul, lorsqu'enfin α sera devenu tout à fait nul, mais alors les deux courbes gg et $g'g'$ se confondront dans toute leur étendue.

Cela posé, on a, par le théorème de Taylor,

$$\text{Équations de } gg \left\{ \begin{aligned} & V=0\,, && (1) \\ & \frac{dV}{dA}=0\,; && (2) \end{aligned} \right.$$

$$\text{Équations de } g'g' \left\{ \begin{aligned} & V+\frac{dV}{dA}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,, && (3) \\ & \frac{dV}{dA}+\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^3V}{dA^3}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,; && (4) \end{aligned} \right.$$

équations dont les dernières rentrent, en effet, dans les premières, lorsqu'on suppose $\alpha=0$; et dont la combinaison, dans le cas contraire, fera connaître le point p. Elles sont au nombre de quatre, parce que, généralement parlant, deux courbes ne se coupent pas dans l'espace, mais, comme gg et $g'g'$ sont ici situées toutes deux sur la surface MMM, elles doivent se rencontrer et ces quatre équations doivent équivaloir à trois seulement.

En rejetant donc la troisième, le point p sera donné par le système des équations (1), (2), (4). Mais, lorsque trois surfaces passent par un même point, toute surface qui a pour équation une combinaison quelconque des équations de celle-là, passe aussi par ce point; donc, en particulier, la différence entre les équations (2) et (4) est l'équation d'une surface qui, combinée avec celle qu'exprime l'équation (1), exprimera une courbe $h'h'$ qui, comme $g'g'$, coupera gg au point p. Cette équation est

$$\frac{d^2V}{dA^2}\frac{\alpha}{1}+\frac{d^3V}{dA^3}\frac{\alpha^2}{1.2}+\ldots=0\,,$$

ou, plus simplement,

$$\frac{d^2V}{dA^2}+\alpha\left\{\frac{d^3V}{dA^3}+\ldots\right\}=0\,, \qquad (5)$$

puisque α n'est point supposé nul. Ainsi on pourra, pour la détermination du point p, substituer le système des équations (1), (2), (5) au système des équations (1), (2), (4).

Mais, à mesure que α décroîtra, la courbe $h'h'$ exprimée par le système des équations (1) et (5), tendra continuellement à devenir une courbe hh, coupant mm ou gg en t; on aura donc les équations de hh, en faisant $\alpha=0$, dans l'équation (5), et combinant l'équation résultante avec l'équation (1); ainsi le point t de mm, qui répond à la valeur A de la constante, sera donné par le système des trois équations

$$V=0\,; \quad \frac{dV}{dA}=0\,, \quad \frac{d^2V}{dA^2}=0\,,$$

si donc on élimine A entre elles, les deux équations résultantes, en x, y, z, devant être satisfaites à la fois par les coordonnées des points t, t', t'',... qui répondent aux diverses valeurs A, A', A'',... de la constante, seront les équations de la courbe mm qui les contient tous, c'est-à-dire, de l'arête de rebroussement.

Si l'équation $V=0$ renfermait n constantes A_1, A_2, A_3, ... A_n, liées entre elles par $n-1$ équations; on se conduirait absolument comme il a été expliqué dans le § précédent. (*)

(*) Ce qui précède me paraît établir, d'une manière nette, un point assez délicat de la géométrie transcendante, et pourrait, à la rigueur, être ramené aux simples élémens. Je n'ignore pas, au surplus, que l'opinion, toujours vacillante, semble maintenant repousser ces doctrines lumineuses, appelées vainement, pendant plus d'un siècle, par les vœux des géomètres, et dont la découverte fait tant d'honneur à l'époque où nous vivons. Mais, je n'en demeure pas moins fermement persuadé que, s'il peut être utile de se familiariser avec la considération des infiniment petits, il est beaucoup plus important encore, sur-tout dans l'enseignement élémentaire, de n'appuyer les théories fondamentales que sur les notions les plus rigoureuses, du moins, lorsqu'on aspire à quelque chose de plus qu'à enseigner ou à apprendre un métier.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Bret, *professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble,*

Au Rédacteur des *Annales* ;

En réponse aux lettres de MM. Du Bourguet et Bérard, insérées aux pages 94 et 97 de ce volume.



Monsieur et très-cher Confrère,

La difficulté que j'ai élevée sur la démonstration donnée par M. Du Bourguet, à la page 338 du 2.e volume des *Annales*, du principe qui sert de fondement à la théorie des équations, me semble subsister encore dans son entier, malgré la réponse que ce géomètre y a faite, à la page 94 du présent volume.

Soit en effet l'équation

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots=y\,, \qquad (1)$$

dans laquelle A, B, C,.... sont des nombres quelconques ; si je donne à x des valeurs numériques α, α', α'',...., il en résultera pour y des valeurs numériques correspondantes β, β', β'',...; donc x dépend de y et de A, B, C,....; et on a

$$x=\varphi(A\,,B\,,C,\ldots\ldots y). \qquad (2)$$

Cette équation détermine les valeurs $x=\alpha$, α', α'',....:

Lorsque $y=\beta$, β', β'',....;

Cela posé, toutes les couples de x, y, savoir, $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$,....;

qui satisfont à l'équation (1), satisfont aussi à l'équation (2); mais réciproquement, faut-il en conclure que toutes les couples qui satisfont à cette dernière équation, satisfont aussi à la première? Je pense que cette conséquence ne peut être admise sans démonstration.

D'après cela, si, dans l'équation (2), on fait $y=0$, on aura bien une valeur correspondante de x; mais il reste à savoir si ce couple satisfait à l'équation primordiale, d'autant plus que cette équation (1) peut cesser d'exister dans ce cas. Je persiste donc à croire qu'il est très-difficile de ramener la démonstration de ce principe à des notions purement élémentaires.

Permettez-moi, Monsieur, de saisir cette occasion, pour répondre à la réclamation insérée à la page 97 de ce volume.

Je n'ignorais point, en effet, que M. Bérard eût une construction nouvelle de la parabole; mais je n'avais pas connaissance du moyen qu'il employait. Je l'ai examiné depuis, et j'ai reconnu que nos méthodes diffèrent essentiellement.

Celle que l'on trouve dans les *Opuscules mathématiques* de M. Bérard, a pour but de déterminer le foyer, et emploie pour cela cette propriété de la parabole, que la tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur et le diamètre. Mais il faut bien remarquer que, si le système primitif des axes auxquels on rapporte la courbe est rectangulaire, les tangentes (3) et (4) seront à angles droits (page 223 du tome 2.e des *Annales*), et la droite qui joindra les points de contact A et D, passera toujours par le foyer; en sorte que la construction donnée par M. Bérard n'est point applicable au cas où le système primitif des axes est rectangulaire. Il faut donc, dans ce cas, recourir à une autre propriété, pour construire la parabole. Cette propriété consiste en ce que le point de rencontre des tangentes (3) et (4) est un point de la directrice de la parabole.

L'inconvénient que je viens de remarquer n'a point lieu dans ma méthode, ce qui la rend tout à fait générale. En effet, elle

détermine le sommet, et même directement tous les points de la courbe, en n'employant uniquement que cette propriété de la parabole, rapportée soit à son axe soit à ses diamètres, savoir, que la soustangente est double de l'abscisse du point de contact.

Agréez, etc.

Grenoble, le 1.er avril 1813.

Lettre de M. Puissant, chef de bataillon au corps impérial des ingénieurs géographes, attaché au dépôt de la guerre, etc.

Au Rédacteur des *Annales*,



Monsieur,

La démonstration analitique d'une propriété très-remarquable des lignes et surfaces du second ordre que vous avez donnée à la page 293 du présent volume de vos intéressantes *Annales*, est en effet d'une extrême simplicité; et je conviens que celle que j'ai développée à la page 138 de la deuxième édition de mon *Recueil de propositions de géométrie*, et qui n'est relative qu'aux lignes du second ordre, est, comme vous le dites, compliquée et incomplète; mais la seconde démonstration, indiquée aux pages 141 et 143, me paraît être très-courte et très-générale. C'est ce que je me propose de faire voir par ce qui suit.

L'équation d'une surface du second ordre, rapportée à des axes obliques, étant

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dx=0\,, \qquad (1)$$

celle du plan tangent, rapporté aux mêmes axes, et assujetti à passer par un point ayant pour coordonnées a, b, c, est

$$(Aa+D)x+Bby+Ccz+Da=0. \qquad (2)$$

Cette équation (2) est aussi essentiellement celle du plan de la courbe de contact de la surface (1) et de la surface conique enveloppante, dont les coordonnées du sommet ou centre sont a, b, c, (page 415 du recueil cité); or, l'abscisse du point où ce plan coupe l'axe des x est

$$x=-\frac{Da}{Aa+D},$$

et ne dépend que de la coordonnée a; sa valeur sera donc toujours la même, quand on ne fera varier que les deux autres coordonnées b, c; ce qui suffit pour établir la proposition dont il s'agit.

Agréez, etc.

Paris, le 8 avril 1813.

QUESTIONS RÉSOLUES.

Solution du problème de gnomonique proposé à la page 40 de ce volume;

Par M. J. M.

ÉNONCÉ 1.° *Tracer sur une colonne cylindrique et verticale, portant un chapiteau circulaire, un cadran dont l'heure soit indiquée par l'ombre du chapiteau sur le fust de la colonne?*

2.° *Décrire sur ce fust, les deux courbes qui terminent les lignes horaires, au solstice d'été et au solstice d'hiver?*

3.° *Faire une application spéciale des méthodes ou formules auxquelles on sera parvenu, en se donnant, en nombres, les diamètres du chapiteau et du fust de la colonne, ainsi que la latitude du lieu?*

Considérations préliminaires;

Par le Rédacteur des *Annales.*

La brièveté de la lettre suivante, qui renferme la solution du problème, nous a semblé nécessiter quelques développemens préliminaires, propres à mieux faire comprendre à quoi ce problème se réduit.

Si un cylindre vertical est exposé aux rayons du soleil, ces rayons pouvant sensiblement être considérés comme parallèles, on conçoit que toujours une moitié de la surface de ce cylindre sera éclairée, tandis que son autre moitié sera privée de lumière. On conçoit de plus, que la partie éclairée sera séparée de la partie non éclairée, par deux droites parallèles à l'axe du cylindre, situées avec cet axe dans un même plan perpendiculaire à celui que l'on conduirait par le même axe et par le centre du soleil.

On voit par là que, si, par l'axe du cylindre, on conçoit un plan perpendiculaire à celui du méridien, les intersections de ce plan avec la surface de ce cylindre seront, pour tous les jours à midi, les lignes qui sépareront sa partie éclairée de sa partie non éclairée. Mais comme, pour une même heure déterminée, autre que celle de midi, le vertical du soleil change tous les jours, avec la déclinaison de cet astre; il s'ensuit que chaque jour aussi les lignes qui, pour une même heure déterminée, autre que celle de midi, sépareront la partie éclairée du cylindre de sa partie non éclairée, varieront de situation avec la déclinaison du soleil.

Concevons présentement que le cylindre porte, à sa partie supérieure, un plateau circulaire horizontal, d'un rayon supérieur au sien, et ayant soncentre sur son axe. Ce plateau projetera sur la surface du cylindre une ombre dont la situation variera avec celle du vertical du soleil et dont la figure dépendra de la hauteur du soleil dans ce vertical. Cette même ombre coupera en un point chacune des droites limitatrices de la partie éclairée du cylindre; et la situation de ce point dépendra aussi évidemment de la hauteur du soleil et de la déclinaison de son vertical, lesquelles dépendent à leur tour de la déclinaison du soleil et de l'angle horaire.

Ce point variant tous les jours de position sur la surface du cylindre, pour une même heure donnée; la courbe qu'il tracera, sur cette surface, pourra être prise pour la ligne horaire répondant à cette heure donnée. En traçant ainsi toutes les lignes horaires, le lieu de leurs extrémités inférieures et celui de leurs extrémités supérieures seront respectivement les courbes qui terminent les lignes horaires au solstice d'été et au solstice d'hiver.

Soit C (fig. 6) le centre du plateau; soit CM la ligne méridienne, tracée sur ce plateau; soit ZCM le plan du méridien; soit ZCA le plan du vertical du soleil, dont la déclinaison par rapport au plan du méridien soit l'angle MCA; soit enfin, dans ce plan, CS la droite allant du point C au centre du soleil, en sorte que la hauteur de cet astre soit l'angle SCA qui, comme l'angle MCA, dépendra de l'heure et de la déclinaison du soleil.

Soit menée CB, perpendiculaire à CA, et se terminant en B, à la circonférence de la base supérieure du cylindre. Si l'on mène, sur la surface de ce cylindre, BD parallèle à son axe, cette droite sera, pour la déclinaison MCA du plan du vertical du soleil, la limite de la partie non éclairée de ce même cylindre.

Pour obtenir l'intersection de cette droite avec l'ombre du plateau, soit menée, par B, la parallèle EF à CA, se terminant en E à la circonférence du plateau; menant alors EG parallèle à SC, le point G où cette droite coupera BD sera le point cherché.

En faisant *Ang*.MCA$=D$, *Ang*.ACS$=H$, désignant par r et r' respectivement les rayons du cylindre et du plateau, par x l'arc MAB, par y la droite BG, et prenant l'angle droit pour unité de mesure des angles, on trouve

$$x=\frac{1}{2}\pi r(1+D)\,, \quad y=\sqrt{(r'+r)(r'-r)}\,\text{Tang.}H\,;$$

formules au moyen desquelles rien ne sera plus facile que de tracer par points les lignes horaires, sur le développement de la surface du cylindre.

A l'aide de ces préliminaires, il sera très-aisé de suivre la solution renfermée dans la lettre de M. J. M.

AU RÉDACTEUR DES *ANNALES*;

MONSIEUR,

Le problème de gnomonique proposé à la page 40 de ce volume peut être résolu comme il suit :

1.° *Par l'analise.* L'équation du cylindre oblique formé par l'ombre du chapiteau est

$$(a^2+b^2)z^2-2(ax+by)z=r'^2-r^2.$$

L'origine des coordonnées est placée au centre du chapiteau; r et r' sont respectivement les rayons de la colonne et de ce chapiteau; on a de plus $a=$Cos.DCot.H, $b=$Sin.DCot.H; D et H étant respectivement la déclinaison ~~du vertical du soleil~~ et sa hauteur dans ce vertical, et pouvant conséquemment être facilement déduits de la déclinaison du soleil et de l'heure du lieu, par la résolution d'un triangle sphérique.

Au moyen de l'équation ci-dessus, on peut avoir tous les points

de l'ombre du chapiteau sur la colonne. On peut aussi se contenter d'avoir leurs projections sur le plan vertical des xz, ou sur celui des yz; mais l'on n'a besoin, pour la solution du problème, que des points extrêmes de l'ombre; car les lignes horaires sont ici les lignes qui, dans tous les temps, limitent l'ombre à une heure donnée. On se bornera donc à chercher ces points extrêmes, pour chaque heure du jour, et pour un assez grand nombre d'époques de l'année, afin de pouvoir tracer, avec quelque exactitude, les courbes que ces lignes horaires doivent affecter.

2.° *Par des procédés graphiques.* Par une première construction fort simple, on trouvera la hauteur du soleil, et la position du vertical qui passe par cet astre, à une heure et à une époque données. On prendra donc ces deux choses, pour toutes les heures du jour et pour un nombre d'époques suffisant. Au moyen de cela, il sera facile d'avoir la projection de l'ombre, soit sur le plan du méridien soit sur celui du premier vertical. Mais, au lieu d'en faire la construction, on se contentera encore ici de chercher graphiquement les extrémités de l'ombre, ce qui suffira pour tracer les projections des lignes horaires, d'où il sera facile de conclure ensuite le tracé de ces mêmes lignes sur le développement du cylindre.

Je joins ici ce développement (fig. 7), pour une latitude de 45.°45′, le rayon du cylindre étant 36 millimètres et celui du chapiteau 45 millimètres.

Agréez, etc.

Lyon, le 19 de mars 1813.

Solutions

Solutions des deux problèmes de géométrie proposés à la page 243 de ce volume;

Par MM. S.***, Bérard, principal du collége de Briançon, membre de plusieurs sociétés savantes, J. M. C. Van Utenhove et Tédenat, correspondant de la première classe de l'institut, et recteur de l'académie de Nismes.



Problème I. *Déterminer le lieu géométrique des extrémités de tous les arcs de cercles d'une même longueur donnée, mais de rayons différens, qui touchent, par leurs milieux, une même droite donnée, en un même point?*

Solution. Soient pris (fig. 8) le milieu commun A de tous ces arcs pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite AX, à laquelle ils doivent être tangens pour axe des x; de manière que l'axe AY des y soit le lieu des centres. Soient de plus $2a$ la longueur commune de ces arcs, AM la moitié de l'un d'eux, et r le rayon du cercle dont il fait partie; le point M sera ainsi l'un des points de la courbe cherchée. Soit enfin abaissée de ce point sur AY la perpendiculaire MQ, ce qui donnera MQ$=x$ et AQ$=y$.

MQ ou x étant le sinus de AM ou a, pour le rayon r, son sinus tabulaire sera $\frac{x}{r}$ et comme, d'un autre côté, l'arc semblable à a qui répond au rayon 1 est $\frac{a}{r}$, on aura

$$\frac{x}{r} = \text{Sin.}\, \frac{a}{r}. \qquad (1)$$

Ainsi, en prenant r arbitrairement, cette équation donnera la valeur correspondante de x, ce qui suffira pour construire la coube par points.

Au surplus, comme $\frac{a}{r}$ est exprimé en parties du rayon, et que l'usage des tables exige qu'il soit exprimé en degrés, il conviendra, pour la pratique de poser

$$x = r\text{Sin.}\frac{180°}{\pi}.\frac{a}{r}, \text{ ou } x = r\text{Sin.}\frac{200°}{\pi}.\frac{a}{r};$$

suivant que l'on voudra faire usage de l'ancienne ou de la nouvelle division du cercle.

Pour passer de l'équation (1) à l'équation en *coordonnées* rectangulaires, il faut recourir à l'équation du cercle dont le rayon est r, laquelle est $x^2 = 2ry - y^2$, et qui donne

$$r = \frac{x^2 + y^2}{2y}.$$

D'un autre côté, on tire de l'équation (1)

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = \text{Cos.}\,\frac{a}{r}, \qquad \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \text{Tang.}\,\frac{a}{r};$$

il viendra donc, en substituant

$$\frac{2xy}{x^2+y^2} = \text{Sin.}\frac{2ay}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \text{Cos.}\frac{2ay}{x^2+y^2}, \frac{2xy}{x^2-y^2} = \text{Tang.}\frac{2ay}{x^2+y^2}.$$

C'est à peu près à cela que revient la solution de M. S.

Soient pris le point A pour pôle et la corde AM, que nous désignerons

par ρ, pour rayon vecteur ; soit désigné par t l'angle MAX ; cet angle ayant pour mesure la moitié de l'arc AM, dont le sinus est la moitié de la corde AM, on aura

$$t:\text{Sin}.t::\tfrac{1}{2}a:\tfrac{1}{2}\rho:a:\rho\ ,$$

d'où

$$\rho=a.\frac{\text{Sin}.t}{t}\ , \qquad (2)$$

telle est l'équation polaire de la courbe, telle qu'elle a été donnée par MM. Bérard et Van Utenhove ; elle peut aisément servir à décrire cette courbe par points ; mais comme t s'y trouve exprimé en parties du rayon, pris pour unité, ce qui peut être incommode pour la pratique, il sera plus convenable d'écrire

$$\rho=\frac{180^\circ}{t}.\frac{a}{\varpi}\text{Sin}.t\ , \quad \text{ou} \quad \rho=\frac{200^\circ}{t}.\frac{a}{\varpi}\text{Sin}.t\ ,$$

suivant qu'il s'agira de l'ancienne ou de la nouvelle division du cercle, et alors t sera un nombre de degrés.

D'après l'équation (2) on a

$$\frac{\text{d}\rho}{\text{d}t}=a.\frac{t\text{Cos}.t-\text{Sin}.t}{t^2}\ ,$$

on aura donc, pour l'arc de courbe

$$\int \text{d}t\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\text{d}t}{\text{d}2}\right)^2}=a\int\frac{\text{d}\rho}{\text{d}t}\sqrt{t^2-2t\text{Sin}.t\text{Cos}.t+\text{Sin}.^2t}\ ,$$

et pour son secteur

$$\tfrac{1}{2}\int\rho^2\text{d}t=\frac{a^2}{2}\int\frac{\text{d}t\text{Sin}.^2t}{t^2}\ ;$$

d'où M. Bérard conclut que cette courbe n'est ni rectifiable ni quarrable.

M. Bérard passe ensuite de l'équation (2) à l'équation en coordonnées rectangulaires ; il suffit pour cela de poser, comme l'on sait,

$$x=\rho\text{Cos.}t \quad ; \qquad y=\rho\text{Sin.}t\ ,$$

d'où

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\ , \quad \text{Sin.}t=\frac{y}{\rho}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , \quad \text{Tang.}t=\frac{y}{x}\ ,$$

$$t=\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right).$$

Par toutes ces substitutions, l'équation (2) devient

$$\text{Arc.}\left(\text{Tang.}=\frac{y}{x}\right)=\frac{ay}{x^2+y^2}\ ; \text{ ou } \ \frac{y}{x}=\text{Tang.}\frac{ay}{x^2+y^2}. \qquad (3)$$

Cette dernière équation, un peu plus simple que celle de M. S., n'en diffère pas essentiellement, et s'y ramène sur-le-champ, au moyen de la formule connue

$$\text{Tang.}2z=\frac{2\text{Tang.}z}{1-\text{Tang.}^2z}.$$

En différentiant la première des équations (3) on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x^2-2ax+y^2)}{x(x^2+y^2)-a(x^2-y^2)}\ ;$$

équation qui, comme l'observe M. Bérard, pourra servir à mener des tangentes à la courbe et à discuter ses points singuliers.

La question proposée peut encore être considérée comme un cas très-particulier du problème des *Trajectoires aux fonctions égales* ; et c'est sous ce point de vue qu'elle a été envisagée par M. Tédenat.

L'équation du problème est alors

$$\int \mathrm{d}x\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=a. \qquad (4)$$

Et, pour en déduire l'équation différentielle de la courbe cherchée, il faudrait différentier, en ayant égard à la variabilité du rayon r, suivant le procédé de Leibnitz.

Mais l'équation du cercle $x^2=2ry-y^2$ donne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x}{r-y},$$

d'où

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}=\sqrt{\frac{r^2-2ry+x^2+y^2}{(r-y)^2}}=\frac{r}{r-y}=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

au moyen de quoi l'équation (4) devient

$$\int\frac{r\mathrm{d}x}{\sqrt{r^2-x^2}}=a, \quad \text{ou} \quad \int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{r}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}=\frac{a}{r};$$

ce qui donne, en remarquant que x et a doivent s'évanouir en même temps,

$$\text{Arc.}\left(\text{Sin.}=\frac{x}{r}\right)=\frac{a}{r}, \quad \text{ou} \quad \text{Sin.}\frac{a}{r}=\frac{x}{r};$$

équation qui, étant la même que l'équation (1), conduira aux mêmes conséquences.

On a, d'après cela,

$$\text{Cos.}\frac{2ay}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};$$

et si, pour savoir en quels points la courbe rencontre l'axe des y, on fait $x=0$, il viendra

$$\text{Cos.}\frac{2a}{y}=-1, \quad \text{d'où} \quad \frac{2a}{y}=(2n+1)\pi;$$

et par conséquent

$$y=\frac{2a}{(2n+1)\pi},$$

n étant un nombre entier, positif ou négatif, quelconque. Ainsi, la courbe coupe l'axe des y en une infinité de points.

Pour rendre raison de cette circonstance, M. Tédenat remarque que, lorsque l'arc $2a$ est parvenu à former une circonférence, son mouvement n'est pas borné là ; que ses extrémités peuvent ensuite se croiser l'une sur l'autre, et se croiser de plus en plus, jusqu'à ce que l'arc soit entièrement doublé, et forme une double circonférence d'un rayon moitié moindre que celui de la première, auquel cas les deux extrémités de cet arc se confondront avec l'origine. L'arc $2a$ continuant à se ployer encore, formera ensuite une triple circonférence dont le rayon sera le tiers de celui de la première, et ainsi de suite ; de manière que la courbe dont il s'agit formera, tant au-dessous qu'au-dessus de la tangente commune, une infinité de circonvolutions, passant toutes par l'origine, comme le représente la figure 9.

Nous terminerons par observer que le problème qui nous occupe a été traité par M. Bossut, dans le second volume de son *Calcul intégral*, page 77 ; mais les formules auxquelles l'auteur parvient,

formules d'ailleurs assez compliquées, ne font que ramener le problème aux quadratures. (*)

PROBLÈME II. Déterminer le lieu géométrique des contours de toutes les calottes sphériques d'une même étendue, mais de rayons différens, qui touchent par leur pôle un même plan en un même point ?

Ce problème est incomparablement plus facile que le premier.

On démontre sans peine, par les élémens, comme l'a fait M. Bossut dans sa géométrie, ce théorème d'Archimède : savoir, que *le cercle décrit sur une sphère, avec une ouverture de compas quelconque, détermine sur cette sphère une calotte équivalente au cercle décrit sur un plan, avec la même ouverture de compas ;* d'où résulte encore que *les cercles décrits sur des sphères inégales, avec une même ouverture de compas, déterminent sur ces sphères des calottes équivalentes.*

Or, il résulte évidemment de là que la surface cherchée est une sphère ayant pour centre le pôle commun de toutes les calottes, et pour rayon le rayon du cercle auquel toutes ces calottes doivent être équivalentes ; et c'est là le résultat auquel sont également parvenus MM. S.***, Bérard, Van Utenhove et Tédenat.

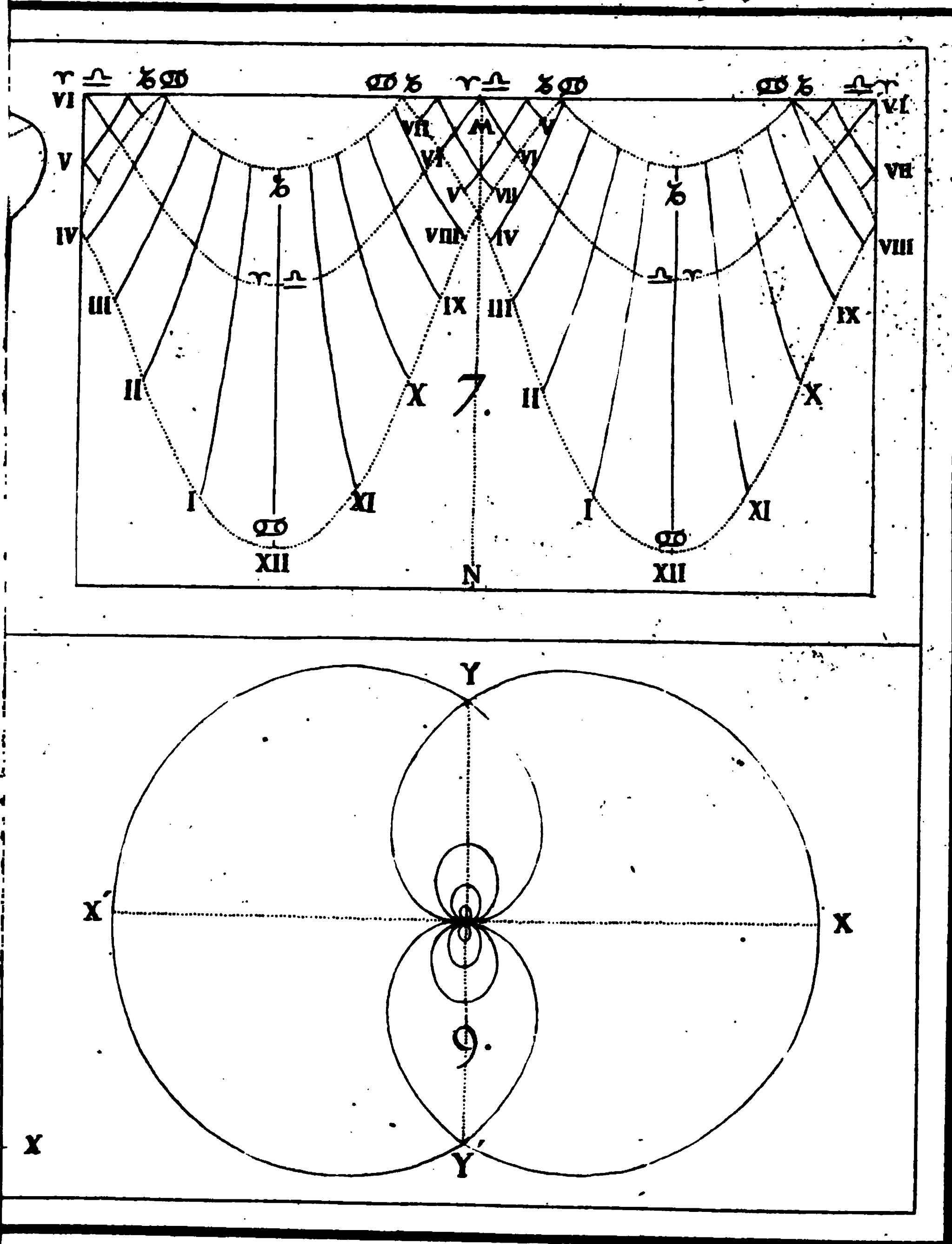
(*) Une autre solution du problème, avec des applications pratiques, par M. Argand, a été annoncée au Rédacteur des *Annales*. Elle ne lui est point encore parvenue.

QUESTION PROPOSÉE.

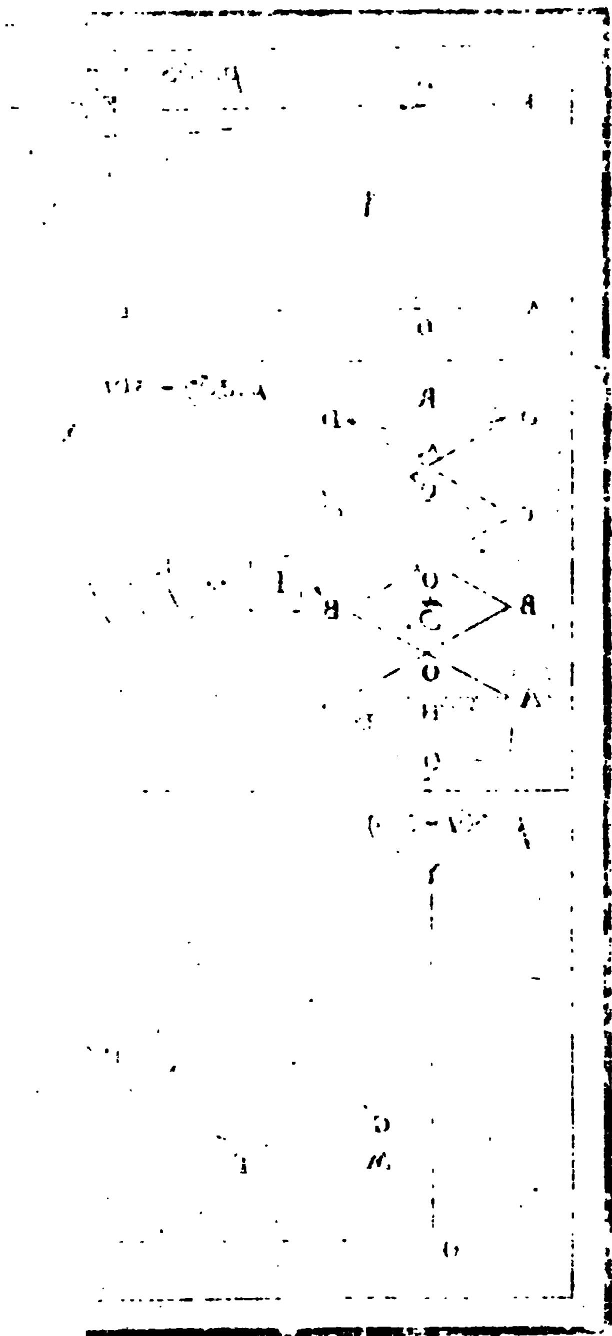
Problème d'Arithmétique.

ETANT donné le produit de la multiplication d'un nombre de plusieurs chiffres par le nombre qu'on déduit de celui-là, en écrivant ses chiffres dans un ordre inverse ; déterminer l'un ou l'autre des deux facteurs de ce produit?

FIN DU TOME TROISIÈME.



J. D. G. fecit.



TABLE

Des matières contenues dans le III.me volume des Annales.

ANALISE APPLIQUÉE.

ANALISE ÉLÉMENTAIRE.

ANALISE INDÉTERMINÉE.

ANALISE TRANSCENDANTE.

ARITHMÉTIQUE.

CORRESPONDANCE.

DYNAMIQUE.

GÉOMÉTRIE ANALITIQUE.

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

GÉOMÉTRIE TRANSCENDANTE.

GNOMONIQUE.

PROBABILITÉ.

STATIQUE.

TRIGONOMÉTRIE.

VARIÉTÉS.

CORRESPONDANCE

Entre les questions proposées *et leurs* solutions.

		Résolu, tom. III, pages
Tome II, page 287	Problème I.	—
	Problème II.	34—41.
Page 324	Problème.	59—76.
Page 356	Problème.	98—104.
Page 384	Théorème.	161—169.
Tome III, page 40	Problème	372—377.
Page 76	Théorèmes.	192—196.
Page 104	Problème I.	—
	Problème II.	213—231.
Page 140	Problème.	241—243.
Page 196	Théorèmes.	317—324.
Page 231	Problème.	—
Page 243	Problèmes.	377—384.

CORRECTIONS ET ADDITIONS

Pour le tome troisième des Annales.



PAGE 5, ligne dernière — (*) ; *lisez* : (**).

Page 20, ligne 3 — exposant ; *lisez* : posant.

Page 24, en titre — FORMULES ; *lisez* : FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES.

Page 41 — Consulter, sur le mémoire de M. *de Maizières*, la lettre de M. *Serres*, page 291.

Page 44, ligne 17 — réelles ; *lisez* réelle additive.

Ligne 20 — satiferaient ; *lisez* : satisferaient.

Ligne 26 — $P_i x^{-mi}$; *lisez* : $P_i x^{m-i}$.

Page 95, équations (*b*) — les *a* de la seconde ligne doivent porter un accent, et ceux de la troisième doivent en porter deux.

A la seconde ligne des équations du bas de la même page, la lettre *a* doit porter deux accens.

Page 97, ligne 2 — n'est pas établi ; *lisez* : n'a pas établi.

Page 104, problème, 2.e ligne — courbures ; *lisez* courbure.

Page 107, ligne 19 — la dernière des deux conditions se réduit simplement à $D>0$, parce que la première rend nécessairement $A+B-2C\,\text{Cos.}\gamma>0$. En particulier, si $D=0$, la courbe se réduit à un point.

Ligne 23 — pour les mêmes raisons, la seconde condition se réduit simplement à $D<0$. Si, en particulier, on a $D=0$, la courbe se réduit au système de deux droites.

Ligne 28 — ces deux conditions reviennent à $C=A\,\text{Cos.}\gamma=B\,\text{Cos.}\gamma$.

Ligne 29 — *ajoutez* : les valeurs de *r* seront égales et de signes contraires, si l'on a $A+B=2C\,\text{Cos.}\gamma$, et alors l'hyperbole sera équilatérale.

N. B. Toutes ces fautes du mémoire de M. *Bérard*, qui est privé de la vue, ne sont pas du fait de l'auteur.

Page 140 — L'auteur dont il est question dans la 1.re note est BRUNACCI ; son ouvrage a pour titre : *Calcolo integrale delle equazioni lineari* (Firenza., 1798, in-4.o).

Page 169, première ligne du mémoire — *Transporter la virgule après le mot* polyèdres.

Page 169, à la note — *Placer une virgule après le mot* Besançon.

Page 287, ligne 10 — nouvelle nouvelle; *lisez* : nouvelle.

*Supplément à l'*Errata *du II.e Volume.*

Page 4, équation (4) — β; *lisez* : Sin.β.

Page 33, première équation — $A''Z^2$; *lisez* : $A''z^2$.



